FREE DEMO SAMPLE

Guessing Paper 2026-27 Demo Set

B.Sc. · Semester 5 · Introduction to Quantum Mechanics

ABVV Bilaspur — अटल बिहारी वाजपेयी विश्वविद्यालय, बिलासपुर

यह सिर्फ़ एक डेमो सेट है 📘

इस डेमो से आप हमारे उत्तरों की क्वालिटी और पेपर का फ़ॉर्मेट देख सकते हैं। **असली 3 पूरे Guessing Paper सेट** (Set A, B, C) सिर्फ़ **Pariksha Pass App** में मिलते हैं:

- हर विषय के **3 पूरे सेट** — Most Probable, Highly Likely और Alternate
- हर प्रश्न का **सटीक मॉडल उत्तर** — हिंदी और English दोनों में
- **Year Tag** — जो प्रश्न पहले यूनिवर्सिटी परीक्षा में आ चुके हैं
- आपकी **यूनिवर्सिटी के पैटर्न** पर — पूरा सिलेबस कवर

▶ Pariksha Pass App डाउनलोड करें
यहाँ टैप करें — Google Play पर उपलब्ध

QR स्कैन करें

इस डेमो के प्रश्न असली Set A/B/C से नहीं लिए गए हैं। कोई भी पेपर परीक्षा में प्रश्न आने की गारंटी नहीं देता — इसे पाठ्यपुस्तक के साथ अभ्यास के लिए उपयोग करें। · Free sample shared on cguniversities.com

Paper Code: **PHSC-05T**
Demo Set

Roll No. | | | | | | | | | |

BILASPUR UNIVERSITY, BILASPUR (C.G.)
बिलासपुर विश्वविद्यालय, बिलासपुर (छ.ग.)

B.Sc. (Fifth Semester) Examination, Nov.–Dec. 2026
बी.एस.सी. (पंचम सेमेस्टर) परीक्षा, नवम्बर–दिसम्बर 2026

INTRODUCTION TO QUANTUM MECHANICS
क्वांटम यांत्रिकी का परिचय

Time / **समय** : 3 Hours	Maximum Marks / **पूर्णांक** : 70

DEMO SAMPLE – not from the actual sets · prepared by Online Student Seva for the Pariksha Pass App · not an official University question paper

Instructions:

1. Section A: Q.1 (objective) is compulsory. Attempt any 4 of the 5 short-answer questions in Q.2.
2. Section B: attempt **one** question from each unit (Q.3 to Q.6); each has an internal choice.
3. Figures in the right margin show full marks. Draw neat, labelled diagrams wherever necessary.

निर्देश : खण्ड-अ में प्रश्न 1 अनिवार्य है; प्रश्न 2 के 5 में से 4 प्रश्न हल करें। खण्ड-ब में प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न हल करें (प्रश्न 3 से 6), सभी में आंतरिक विकल्प है। दाईं ओर के अंक पूर्णांक दर्शाते हैं। आवश्यकतानुसार स्वच्छ व नामांकित चित्र बनाएँ।

SECTION – A / खण्ड – अ

Q.1 **Choose the correct answer.** सही उत्तर चुनिए। 10 × 1 = 10

(1) According to Wien's displacement law ($\lambda_{max} \cdot T$ = constant), if the temperature of a blackbody is doubled, the wavelength of maximum emission becomes:
वीन के विस्थापन नियम ($\lambda_{max} \cdot T$ = नियतांक) के अनुसार कृष्णिका का ताप दोगुना करने पर अधिकतम उत्सर्जन की तरंगदैर्घ्य हो जाती है:

(a) double / दोगुनी (b) half / आधी
(c) four times / चार गुनी (d) unchanged / अपरिवर्तित

(2) The energy of a photon of wavelength 4000 Å is approximately (hc = 12400 eV Å):
4000 Å तरंगदैर्घ्य के फोटॉन की ऊर्जा लगभग है (hc = 12400 eV Å):

(a) 1.55 eV / 1.55 eV (b) 3.1 eV / 3.1 eV
(c) 6.2 eV / 6.2 eV (d) 12.4 eV / 12.4 eV

(3) The wave nature of a moving cricket ball is not noticed in daily life because:
चलती क्रिकेट गेंद की तरंग प्रकृति दैनिक जीवन में दिखाई नहीं देती क्योंकि:

(a) a ball has no wavelength / गेंद की कोई तरंगदैर्घ्य नहीं होती
(b) its de Broglie wavelength is extremely small compared with its size / उसकी डी-ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य उसके आकार की तुलना में अत्यंत छोटी होती है
(c) its wavelength is very large / उसकी तरंगदैर्घ्य बहुत बड़ी होती है
(d) waves cannot be associated with objects having charge / आवेश वाली वस्तुओं के साथ तरंग नहीं जोड़ी जा सकती

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

(4) If the position of an electron is known within $\Delta x = 1$ Å, the minimum uncertainty in its momentum ($\Delta p = \hbar/2\Delta x$) is about:
यदि इलेक्ट्रॉन की स्थिति $\Delta x = 1$ Å के भीतर ज्ञात है, तो उसके संवेग की न्यूनतम अनिश्चितता ($\Delta p = \hbar/2\Delta x$) लगभग है:

(a) 5.3×10^{-25} kg m/s / 5.3×10^{-25} kg m/s
(b) 1.05×10^{-24} kg m/s / 1.05×10^{-24} kg m/s
(c) 5.3×10^{-34} kg m/s / 5.3×10^{-34} kg m/s
(d) 6.6×10^{-24} kg m/s / 6.6×10^{-24} kg m/s

(5) A free electron has a perfectly sharp momentum ($\Delta p = 0$). According to the uncertainty principle, the uncertainty in its position is:
एक मुक्त इलेक्ट्रॉन का संवेग पूर्णतः सटीक ($\Delta p = 0$) है। अनिश्चितता सिद्धांत के अनुसार उसकी स्थिति की अनिश्चितता है:

(a) Zero / शून्य
(b) Equal to its de Broglie wavelength / इसकी दे ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य के बराबर
(c) Infinite (position is completely undetermined) / अनंत (स्थिति पूर्णतः अनिर्धारित)
(d) Equal to $h/2$ / $h/2$ के बराबर

(6) The commutator $[x, p_x] = x \cdot p_x - p_x \cdot x$ equals:
क्रमविनिमेयक $[x, p_x] = x \cdot p_x - p_x \cdot x$ बराबर है:

(a) 0 / 0
(b) $\hbar$ / $\hbar$
(c) $i\hbar$ / $i\hbar$
(d) $-\hbar^2$ / $-\hbar^2$

(7) In a stationary state of a system, the probability density $|\Psi(x, t)|^2$ is:
किसी निकाय की स्थिर अवस्था में प्रायिकता घनत्व $|\Psi(x, t)|^2$ होता है:

(a) dependent on time / समय पर निर्भर
(b) independent of time / समय से स्वतंत्र
(c) always zero / सदैव शून्य
(d) always uniform in space / सदैव समान रूप से वितरित

(8) If the wave function $\psi(x)$ of a particle is real, the probability current density is:
यदि किसी कण का तरंग-फलन $\psi(x)$ वास्तविक है, तो प्रायिकता धारा घनत्व है:

(a) maximum / अधिकतम
(b) negative / ऋणात्मक
(c) infinite / अनंत
(d) zero / शून्य

(9) For a particle in a one-dimensional infinite box, the wave function for $n = 3$ has how many nodes inside the box (excluding the walls)?
एक-विमीय अनंत बॉक्स में कण के लिए $n = 3$ वाले तरंग-फलन के बॉक्स के भीतर (दीवारों को छोड़कर) कितने नोड होते हैं?

(a) 1 / 1
(b) 2 / 2
(c) 3 / 3
(d) 4 / 4

(10) The probability of a particle tunnelling through a rectangular barrier decreases when:
आयताकार अवरोध से किसी कण के सुरंगन की प्रायिकता तब घटती है जब:

(a) the barrier width is increased / अवरोध की चौड़ाई बढ़ाई जाए
(b) the barrier width is decreased / अवरोध की चौड़ाई घटाई जाए
(c) the particle mass is decreased / कण का द्रव्यमान घटाया जाए
(d) the barrier height is decreased / अवरोध की ऊँचाई घटाई जाए

Q.2 **Attempt any 4 of the following 5 questions.** निम्नलिखित 5 में से किन्हीं 4 प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **4 × 5 = 20**

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

(a) State Planck's quantum hypothesis. How did it solve the problem of blackbody radiation? **5**
प्लांक की क्वांटम परिकल्पना बताइए। इसने कृष्णिका विकिरण की समस्या कैसे हल की?

(b) Light of wavelength 3000 Å falls on a metal of work function 2.3 eV. Find the maximum kinetic energy of the photoelectrons, the stopping potential and the threshold wavelength (hc = 12400 eV Å). **5**
3000 Å तरंगदैर्घ्य का प्रकाश 2.3 eV कार्य-फलन वाली धातु पर पड़ता है। प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम गतिज ऊर्जा, निरोधी विभव और देहली तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए (hc = 12400 eV Å)।

(c) An electron is confined to an atom of size about 1 Å. Use the uncertainty principle to estimate the minimum kinetic energy of the electron. **5**
एक इलेक्ट्रॉन लगभग 1 Å आकार के परमाणु में सीमित है। अनिश्चितता सिद्धांत से इलेक्ट्रॉन की न्यूनतम गतिज ऊर्जा का आकलन कीजिए।

(d) Write the Schrödinger equation for a free particle and obtain its solution and energy. **5**
मुक्त कण के लिए श्रोडिंगर समीकरण लिखिए और उसका हल तथा ऊर्जा प्राप्त कीजिए।

(e) Find the lowest three energy levels of an electron in a one-dimensional infinite box of width 0.2 nm. **5**
0.2 nm चौड़ाई के एक-विमीय अनंत बॉक्स में इलेक्ट्रॉन के निम्नतम तीन ऊर्जा-स्तर ज्ञात कीजिए।

SECTION – B / खण्ड – ब

Long answer questions · one question from each unit with internal choice / **दीर्घ उत्तरीय प्रश्न**

Q.3 Why did classical physics fail to explain blackbody radiation? Derive Planck's radiation law and show that it reduces to the Rayleigh-Jeans law and Wien's law in the proper limits. **10**
चिरसम्मत भौतिकी कृष्णिका विकिरण की व्याख्या में क्यों विफल रही? प्लांक का विकिरण नियम व्युत्पन्न कीजिए और दिखाइए कि उचित सीमाओं में वह रेले-जीन्स नियम और वीन नियम में बदल जाता है।

OR / अथवा

Solve the following problems on wave-particle duality: (a) de Broglie wavelength of an electron accelerated through 150 V; (b) the wavelength of a cricket ball; (c) the Compton shift and recoil energy for X-rays of 0.5 Å scattered at 60°; (d) the wavelength of thermal neutrons at 300 K.
तरंग-कण द्वैत पर निम्नलिखित समस्याएँ हल कीजिए: (क) 150 V से त्वरित इलेक्ट्रॉन की डी-ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य; (ख) क्रिकेट गेंद की तरंगदैर्घ्य; (ग) 0.5 Å के X-किरणों के 60° पर प्रकीर्णन के लिए कॉम्पटन विस्थापन और प्रतिक्षेप ऊर्जा; (घ) 300 K पर ऊष्मीय न्यूट्रॉनों की तरंगदैर्घ्य।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Q.4 Solve the following problems on the uncertainty principle: (a) the minimum uncertainty in the position of an electron moving at 5×10^3 m/s with its speed known to 0.003%; (b) the spectral width of a line from a state of lifetime 10^{-8} s; (c) the uncertainty in the position of a 10 g bullet; (d) the mass of the exchanged particle if the nuclear force has a range of 1.4 fm. **10**

अनिश्चितता सिद्धांत पर निम्नलिखित समस्याएँ हल कीजिए: (क) 5×10^3 m/s से गतिशील इलेक्ट्रॉन की चाल 0.003% तक ज्ञात होने पर उसकी स्थिति की न्यूनतम अनिश्चितता; (ख) 10^{-8} s जीवनकाल वाली अवस्था से निकली वर्णक्रम रेखा की चौड़ाई; (ग) 10 g की गोली की स्थिति की अनिश्चितता; (घ) यदि नाभिकीय बल का परास 1.4 fm हो तो विनिमित कण का द्रव्यमान।

OR / अथवा

Derive the general uncertainty relation $\Delta A \cdot \Delta B \geq \tfrac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle|$ for two Hermitian operators. Hence obtain $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ and explain when two observables can be measured together exactly.

दो हर्मिटीय संकारकों के लिए व्यापक अनिश्चितता संबंध $\Delta A \cdot \Delta B \geq \tfrac{1}{2}|\langle [A, B] \rangle|$ व्युत्पन्न कीजिए। इससे $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ प्राप्त कीजिए और समझाइए कि दो प्रेक्ष्य राशियाँ कब एक साथ ठीक-ठीक मापी जा सकती हैं।

Q.5 Why must a wave function be normalised? Normalise (a) $\psi = A\,x(L - x)$ for $0 \leq x \leq L$, (b) $\psi = A\,e^{(-a|x|)}$ and (c) $\psi = A\,e^{(-x^2/2\sigma^2)}$, and find $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ and Δx for each. **10**

तरंग-फलन का सामान्यीकरण क्यों आवश्यक है? (क) $0 \leq x \leq L$ के लिए $\psi = A\,x(L - x)$, (ख) $\psi = A\,e^{(-a|x|)}$ और (ग) $\psi = A\,e^{(-x^2/2\sigma^2)}$ को सामान्यीकृत कीजिए, और प्रत्येक के लिए $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ तथा Δx ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Derive the equation of motion $d\langle A \rangle/dt = (i/\hbar)\langle [H, A] \rangle$ for the expectation value of an operator. Hence prove Ehrenfest's theorem and discuss its link with classical mechanics.

किसी संकारक के प्रत्याशा मान की गति-समीकरण $d\langle A \rangle/dt = (i/\hbar)\langle [H, A] \rangle$ व्युत्पन्न कीजिए। इससे एहरेनफेस्ट प्रमेय सिद्ध कीजिए और चिरसम्मत यांत्रिकी से उसके संबंध की चर्चा कीजिए।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Q.6 For a particle in a one-dimensional infinite box of width L, calculate $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ and the uncertainties Δx and Δp in the n-th state. Verify the uncertainty principle and show that the result approaches the classical one for large n. 10

L चौड़ाई के एक-विमीय अनंत बॉक्स में कण के लिए n-वीं अवस्था में $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ तथा अनिश्चितताएँ Δx और Δp परिकलित कीजिए। अनिश्चितता सिद्धांत की पुष्टि कीजिए और दिखाइए कि n बड़ा होने पर परिणाम चिरसम्मत परिणाम की ओर जाता है।

OR / अथवा

Using the transmission coefficient of a rectangular barrier, calculate the tunnelling probability for a 1 eV electron meeting a 2 eV barrier of width 0.5 nm and 1 nm. Explain how tunnelling accounts for alpha decay and works in the scanning tunnelling microscope.

आयताकार अवरोध के पारगमन गुणांक का उपयोग करके 2 eV ऊँचे और 0.5 nm तथा 1 nm चौड़े अवरोध से टकराते 1 eV इलेक्ट्रॉन की सुरंगन प्रायिकता परिकलित कीजिए। समझाइए कि सुरंगन अल्फा क्षय की व्याख्या कैसे करता है और स्कैनिंग टनलिंग सूक्ष्मदर्शी में कैसे कार्य करता है।

— END OF QUESTION PAPER · प्रश्न-पत्र समाप्त —

ONLINE STUDENT SEVA · PARIKSHA PASS

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

How to use this Demo Set इस डेमो सेट का उपयोग कैसे करें

DEMO SAMPLE – not from the actual sets. This Demo Set has the same layout, length and answer standard as the full Guessing Papers: question paper, syllabus coverage page, model answers in English and Hindi, and an exam-strategy page. The questions in it were chosen only to show the quality of the answers. They are **not** the questions of the paid sets.

डेमो नमूना – वास्तविक सेटों के प्रश्न नहीं। इस डेमो सेट का ढाँचा, लंबाई और उत्तरों का स्तर पूरे गेसिंग पेपर जैसा ही है: प्रश्न-पत्र, पाठ्यक्रम-कवरेज पृष्ठ, हिन्दी व अंग्रेज़ी में आदर्श उत्तर और परीक्षा-रणनीति। इसके प्रश्न केवल उत्तरों की गुणवत्ता दिखाने के लिए चुने गए हैं; ये पेड सेटों के प्रश्न **नहीं** हैं।

Five ways to get the most out of it

1. Attempt the question paper first, without looking at the answers, and keep to the time limit.
2. Compare your answers with the model answers. Notice the order: introduction or definition, headed sections, a table or diagram, and a conclusion.
3. Learn the structure, then write in your own words. Copying lines word for word does not earn extra marks.
4. Practise the labelled diagrams by hand. They are part of a good 10-mark answer.
5. Read the syllabus and your prescribed books for the whole subject; use this paper to practise writing and time management.

इसका अधिकतम लाभ लेने के पाँच तरीके

1. पहले उत्तर देखे बिना प्रश्न-पत्र हल करें और समय-सीमा का पालन करें।
2. अपने उत्तरों को आदर्श उत्तरों से मिलाएँ। क्रम देखें: भूमिका या परिभाषा, शीर्षकों वाले भाग, तालिका या चित्र और निष्कर्ष।
3. ढाँचा सीखें, फिर अपने शब्दों में लिखें। शब्द-दर-शब्द नकल से अतिरिक्त अंक नहीं मिलते।
4. नामांकित चित्र हाथ से बनाने का अभ्यास करें। ये 10 अंक के अच्छे उत्तर का हिस्सा हैं।
5. पूरे विषय के लिए पाठ्यक्रम और अनुशंसित पुस्तकें पढ़ें; इस पेपर का उपयोग लेखन-अभ्यास और समय-प्रबंधन के लिए करें।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Syllabus Coverage & Reference Books पाठ्यक्रम कवरेज एवं संदर्भ ग्रंथ

This paper follows the official **Introduction to Quantum Mechanics** syllabus (PHSC-05T) of the Chhattisgarh Higher Education Department (NEP-2020). The table shows what each unit contains and where this paper tests it.

Unit	Syllabus content (as prescribed)	Questions in this set
1	**Wave-Particle Duality** Planck's quantum hypothesis, photoelectric effect, Compton effect; de Broglie hypothesis and matter waves; Davisson-Germer and G.P. Thomson experiments; wave packet, phase velocity and group velocity. **तरंग-कण द्वैतता** — प्लांक की क्वांटम परिकल्पना, प्रकाश-विद्युत प्रभाव, कॉम्पटन प्रभाव; डी-ब्रॉग्ली परिकल्पना एवं द्रव्य तरंगें; डेविसन-जर्मर तथा जी.पी. थॉमसन प्रयोग; तरंग पैकेट, कला वेग एवं समूह वेग।	Q.1(1), Q.1(2), Q.1(3), Q.2(a), Q.2(b), Q.3
2	**Uncertainty Principle** Heisenberg's uncertainty principle, gamma-ray microscope, single-slit thought experiment; energy-time uncertainty; applications: non-existence of electron in nucleus, ground state energy, natural line width. **अनिश्चितता सिद्धांत** — हाइजेनबर्ग का अनिश्चितता सिद्धांत, गामा-किरण सूक्ष्मदर्शी, एकल झिरी प्रयोग; ऊर्जा-समय अनिश्चितता; अनुप्रयोग: नाभिक में इलेक्ट्रॉन का न होना, निम्नतम अवस्था ऊर्जा, स्पेक्ट्रमी रेखा की प्राकृतिक चौड़ाई।	Q.1(4), Q.1(5), Q.2(c), Q.4
3	**Schrodinger Equation** Wave function and Born interpretation, normalization; time-dependent and time-independent Schrodinger equations; probability current; operators, eigenvalues, expectation values; postulates of quantum mechanics. **श्रोडिंगर समीकरण** — तरंग फलन एवं बॉर्न की व्याख्या, प्रसामान्यीकरण; समय-आश्रित एवं समय-अनाश्रित श्रोडिंगर समीकरण; प्रायिकता धारा; संकारक, आइगेन मान, प्रत्याशा मान; क्वांटम यांत्रिकी के अभिगृहीत।	Q.1(6), Q.1(7), Q.1(8), Q.2(d), Q.5
4	**Applications of Schrodinger Equation** Particle in a one-dimensional and three-dimensional box; potential step; rectangular barrier and tunnelling; linear harmonic oscillator; hydrogen atom (outline). **श्रोडिंगर समीकरण के अनुप्रयोग** — एक विमीय तथा त्रिविमीय बॉक्स में कण; विभव सीढ़ी; आयताकार विभव प्राचीर एवं सुरंगन; रैखिक आवर्ती दोलित्र; हाइड्रोजन परमाणु (रूपरेखा)।	Q.1(9), Q.1(10), Q.2(e), Q.6

Books recommended in the syllabus (derive your answers from these) / पाठ्यक्रम में अनुशंसित पुस्तकें

Text books:

- Arthur Beiser - Concepts of Modern Physics; McGraw-Hill Education
- G. Aruldhas - Quantum Mechanics; PHI Learning, New Delhi
- Satya Prakash - Quantum Mechanics; Kedar Nath Ram Nath, Meerut
- R. Murugeshan and K. Sivaprasath - Modern Physics; S. Chand Publishing, New Delhi

Reference books:

- D.J. Griffiths - Introduction to Quantum Mechanics; Pearson Education
- P.M. Mathews and K. Venkatesan - A Textbook of Quantum Mechanics; McGraw-Hill Education
- Ajoy Ghatak and S. Lokanathan - Quantum Mechanics: Theory and Applications; Macmillan India

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

- N. Zettili - Quantum Mechanics: Concepts and Applications; Wiley

Always use the latest edition. Model answers in this paper follow the standard university textbooks listed above, in simplified exam-ready form. / नवीनतम संस्करण का प्रयोग करें।

Important advice / ज़रूरी सलाह

This is a **DEMO SAMPLE**. Its questions were chosen to show the style and standard of the answers; they are not from the actual sets. Do not depend on any sample paper alone: prepare the complete syllabus from your text book and use this paper to practise writing and time management.

यह एक **डेमो नमूना** है। इसके प्रश्न उत्तरों की शैली और स्तर दिखाने के लिए चुने गए हैं; ये वास्तविक सेटों के प्रश्न नहीं हैं। केवल किसी नमूना पेपर पर निर्भर न रहें: अपनी पाठ्यपुस्तक से पूरा पाठ्यक्रम तैयार करें और इस पेपर का उपयोग लेखन-अभ्यास व समय-प्रबंधन के लिए करें।

ONLINE STUDENT SEVA · PARIKSHA PASS

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

PART – I : English Medium – Model Answers

Every answer is written to the marks allotted — learn the structure, then write in your own words.

Section A · Q.1 : Answer key

No.	Ans.	Correct option	Explanation
1	(b)	half	Since λmax is inversely proportional to T, doubling T halves λmax. The peak of the curve shifts towards shorter wavelengths.
2	(b)	3.1 eV	E = hc/λ = 12400 / 4000 = 3.1 eV.
3	(b)	its de Broglie wavelength is extremely small compared with its size	$\lambda = h/mv$ is about 10^{-34} m for a ball, far too small to cause any measurable diffraction or interference.
4	(a)	5.3×10^{-25} kg m/s	$\Delta p = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-10}) = 5.3 \times 10^{-25}$ kg m/s.
5	(c)	Infinite (position is completely undetermined)	$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$. If $\Delta p = 0$ the right side can be satisfied only by $\Delta x \to \infty$. A perfect plane wave is spread over all space.
6	(c)	iħ	Applying the operators to a function gives $[x, p_x]\psi = i\hbar\psi$. Because the commutator is not zero, x and px cannot have simultaneous sharp values.
7	(b)	independent of time	$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{(-iEt/\hbar)}$, and the time factor has modulus 1, so $\lvert\Psi\rvert^2 = \lvert\psi(x)\rvert^2$ does not change with time.
8	(d)	zero	$J = (\hbar/2mi)(\psi^* \, d\psi/dx - \psi \, d\psi^*/dx)$. For real ψ, ψ* = ψ and the two terms cancel, so J = 0. Bound stationary states have no net flow of probability.
9	(b)	2	$\psi_n = \sqrt{(2/L)} \sin(n\pi x/L)$ has (n − 1) nodes inside the box. For n = 3 there are 2 nodes, at x = L/3 and 2L/3.
10	(a)	the barrier width is increased	T is roughly $e^{(-2\kappa a)}$, where $\kappa = \sqrt{(2m(V_0 - E))}/\hbar$. A wider barrier (larger a), a heavier particle or a higher barrier makes T fall exponentially.

Section A · Q.2 : Short answers

Q.2(a) — 5 marks · ≈ 150–170 words

State Planck's quantum hypothesis. How did it solve the problem of blackbody radiation?

In 1900 Max Planck proposed that matter and radiation exchange energy only in discrete packets called quanta.

- **Energy of a quantum:** $E = h\nu$, where $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s is Planck's constant.
- **Oscillators:** the atomic oscillators in the walls of a blackbody can have only energies 0, hν, 2hν, 3hν ... nhν, and they emit or absorb energy in whole quanta.
- **Result:** the spectral energy density is $u(\nu) = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot 1/(e^{h\nu/kT} - 1)$.
- **Success:** for small ν it gives the Rayleigh-Jeans law, for large ν the Wien law, and it removes the 'ultraviolet catastrophe' of classical theory because high-frequency modes are hard to excite.

This was the beginning of quantum theory.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Q.2(b) 5 marks · ≈ 150–170 words

Light of wavelength 3000 Å falls on a metal of work function 2.3 eV. Find the maximum kinetic energy of the photoelectrons, the stopping potential and the threshold wavelength (hc = 12400 eV Å).

Given: $\lambda = 3000$ Å, $\varphi = 2.3$ eV, hc = 12400 eV Å.

Photon energy: $E = hc/\lambda = 12400 / 3000 = 4.13$ eV.

Einstein's equation: $KE_{max} = E - \varphi = 4.13 - 2.3 =$ **1.83 eV**.

Stopping potential: $eV_0 = KE_{max}$, so $\mathbf{V_0 = 1.83\ V}$.

Threshold wavelength: $\lambda_0 = hc/\varphi = 12400 / 2.3 = 5391$ Å, i.e. **about 5390 Å**.

Light of wavelength longer than 5390 Å, for example red or yellow light, will not cause photoemission from this metal, however intense it is, because each photon then has less energy than φ.

Q.2(c) 5 marks · ≈ 150–170 words

An electron is confined to an atom of size about 1 Å. Use the uncertainty principle to estimate the minimum kinetic energy of the electron.

Given: $\Delta x \approx 1$ Å $= 10^{-10}$ m.

Uncertainty in momentum: $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-10}) = 5.3 \times 10^{-25}$ kg m/s.

Minimum momentum: the electron must have p of at least this order.

Kinetic energy: $K = p^2/2m = (5.3 \times 10^{-25})^2 / (2 \times 9.11 \times 10^{-31}) = 1.5 \times 10^{-19}$ J.

In electron volts, $K = 1.5 \times 10^{-19} / 1.602 \times 10^{-19} \approx$ **0.95 eV**, that is, of the order of 1 eV.

This agrees with the energies of electrons in atoms, which are a few eV. So the confinement alone gives the electron a kinetic energy, and it cannot be at rest.

Q.2(d) 5 marks · ≈ 150–170 words

Write the Schrödinger equation for a free particle and obtain its solution and energy.

For a free particle V = 0, so the time-independent equation is

$\mathbf{-(\hbar^2/2m)\, d^2\psi/dx^2 = E\psi}$, or $d^2\psi/dx^2 + k^2\psi = 0$, with $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

Solution: $\psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx}$.

- The term e^{ikx} describes a particle moving in the +x direction and e^{-ikx} one moving in the −x direction.
- **Momentum:** $p = \hbar k$.
- **Energy:** $E = \hbar^2k^2/2m = p^2/2m$, which is the classical expression.
- k can take any real value, so the energy is **continuous**, not quantised.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

- A plane wave has $|\psi|^2$ constant everywhere, so it cannot be normalised over all space; a wave packet is used for a real particle.

Q.2(e) 5 marks · ≈ 150–170 words

Find the lowest three energy levels of an electron in a one-dimensional infinite box of width 0.2 nm.

Formula: $E_n = n^2h^2/(8mL^2) = n^2E_1$.

Given: $L = 0.2$ nm $= 2 \times 10^{-10}$ m, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s.

Ground state: $E_1 = (6.626 \times 10^{-34})^2 / (8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (2 \times 10^{-10})^2) = 1.506 \times 10^{-18}$ J = **9.4 eV**.

Higher levels:

- $E_2 = 4E_1$ = **37.6 eV**
- $E_3 = 9E_1$ = **84.6 eV**

The levels are in the ratio 1 : 4 : 9 and become farther apart as n increases. A smaller box gives larger energies, since $E_n \propto 1/L^2$.

Section B : Long answers

Q.3 · Unit 1 10 marks · ≈ 600–700 words

Why did classical physics fail to explain blackbody radiation? Derive Planck's radiation law and show that it reduces to the Rayleigh-Jeans law and Wien's law in the proper limits.

INTRODUCTION

A blackbody absorbs all radiation falling on it and, when heated, emits a continuous spectrum that depends only on its temperature. By 1900 the measured spectrum was well known, but no classical theory could explain its full shape. The problem was solved by Max Planck, whose idea of energy quanta started quantum mechanics.

FAILURE OF CLASSICAL THEORY

- **Wien's law (1896)** fitted the data at short wavelengths but failed at long wavelengths.
- **Rayleigh-Jeans law** treats the radiation in a cavity as standing waves, and gives each mode an average energy kT (equipartition). The energy density is

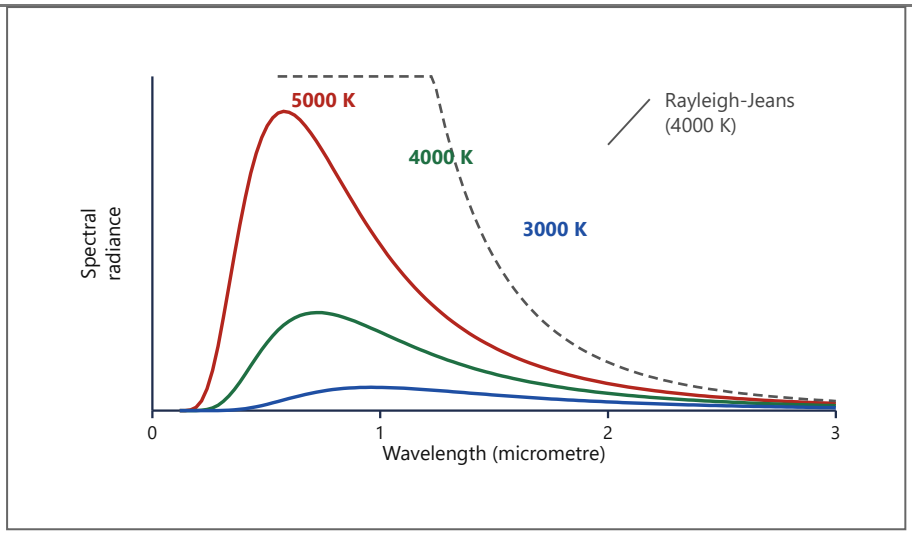
$$\mathbf{u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3.}$$

It agrees with experiment at low frequencies, but it grows as ν^2 for ever higher frequency, so the total energy $\int u\, d\nu$ would be infinite. This absurd result is called the **ultraviolet catastrophe**.

PLANCK'S HYPOTHESIS

1. The radiating atoms of the wall act as oscillators of frequency ν.
2. An oscillator cannot have any energy, but only $\mathbf{E_n = nh\nu}$, n = 0, 1, 2 ...
3. It emits or absorbs energy only in whole quanta of size hν.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।



Blackbody spectra at three temperatures; the classical Rayleigh-Jeans curve diverges at short wavelength

DERIVATION OF PLANCK'S LAW

Step 1: number of modes. The number of standing-wave modes per unit volume in the frequency range ν to ν + dν, counting two polarisations, is

$$\mathbf{N(\nu)d\nu = 8\pi\nu^2\, d\nu / c^3.}$$

Step 2: average energy of an oscillator. At temperature T the probability of an oscillator having energy nhν is given by the Boltzmann factor, $P(n) \propto e^{-nh\nu/kT}$. Put $x = h\nu/kT$. Then

$$\bar{E} = \Sigma\, nh\nu\, e^{-nx} / \Sigma\, e^{-nx}.$$

The denominator is a geometric series: $\Sigma\, e^{-nx} = 1/(1 - e^{-x})$. The numerator is $-h\nu\, d/dx$ of the denominator series, which gives $h\nu\, e^{-x}/(1 - e^{-x})^2$. Dividing,

$$\mathbf{\bar{E} = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1).}$$

Step 3: energy density. u(ν)dν = (modes per volume) × (average energy per mode), so

$$\mathbf{u(\nu)\, d\nu = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot d\nu / (e^{h\nu/kT} - 1).}$$

This is **Planck's radiation law**.

LIMITING CASES

- **Low frequency ($h\nu \ll kT$):** $e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT$, so $\bar{E} \approx kT$ and $u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3$, the **Rayleigh-Jeans law**.
- **High frequency ($h\nu \gg kT$):** the exponential in the denominator is large, so $u(\nu) \approx (8\pi h\nu^3/c^3)\, e^{-h\nu/kT}$, which is **Wien's law**. The exponential factor cuts off the high-frequency modes and removes the ultraviolet catastrophe.

OTHER RESULTS FROM THE LAW

- **Wien's displacement law:** setting $du/d\lambda = 0$ gives $\mathbf{\lambda_{max}\, T = 2.898 \times 10^{-3}\ m\ K}$.
- **Stefan-Boltzmann law:** integrating over all frequencies gives total energy density proportional to $\mathbf{T^4}$.
- **Example:** for the Sun's surface at T ≈ 5800 K, $\lambda_{max} = 2.898 \times 10^{-3} / 5800 = 5.0 \times 10^{-7}$ m = 500 nm, in the green-visible region, which agrees with observation.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

SIGNIFICANCE

Planck's constant h = 6.626 × 10^{-34} J s appeared for the first time. The idea of discrete energy was later used by Einstein for the photoelectric effect (1905) and by Bohr for the atom (1913).

CONCLUSION

Classical theory failed because it allowed every mode to take energy kT. Planck's assumption that energy is exchanged in quanta hν makes high-frequency modes rarely excited, gives a spectrum that fits experiment at all wavelengths, and marks the birth of quantum theory.

Q.3 (OR) · Unit 1 10 marks · ≈ 600–700 words

Solve the following problems on wave-particle duality: (a) de Broglie wavelength of an electron accelerated through 150 V; (b) the wavelength of a cricket ball; (c) the Compton shift and recoil energy for X-rays of 0.5 Å scattered at 60°; (d) the wavelength of thermal neutrons at 300 K.

INTRODUCTION

Numerical problems on wave-particle duality use three main relations: the de Broglie relation λ = h/p, the Einstein-Planck relation E = hν and the Compton formula. A neat method scores full marks: write the formula, state the given data with units, substitute, and comment on the result.

Constants used: h = 6.626 × 10^{-34} J s, m (electron) = 9.11 × 10^{-31} kg, 1 eV = 1.602 × 10^{-19} J, hc = 12400 eV Å, k = 1.381 × 10^{-23} J/K, mass of neutron = 1.675 × 10^{-27} kg.

PROBLEM (A): ELECTRON ACCELERATED THROUGH 150 V

Formula: the kinetic energy gained is eV = $p^2/2m$, so p = $\sqrt{(2meV)}$ and

$\lambda = h/\sqrt{(2meV)}$.

For an electron this simplifies to **λ (in Å) = $12.27/\sqrt{V}$.**

Calculation: λ = $12.27/\sqrt{150}$ = 12.27/12.25 = **1.00 Å** (about 1.0 × 10^{-10} m).

Comment: this is of the same order as the spacing between atoms in a crystal, so such electrons are diffracted by crystals. This is the principle of the Davisson-Germer experiment and of electron microscopes.

PROBLEM (B): A CRICKET BALL

Data: take mass m = 0.2 kg and speed v = 10 m/s.

Formula: λ = h/mv.

Calculation: λ = 6.626 × 10^{-34} / (0.2 × 10) = **3.3 × 10^{-34} m.**

Comment: the wavelength is about 10^{19} times smaller than the size of a nucleus (10^{-15} m). No instrument can detect such a wave, so everyday objects show no wave behaviour. The wave nature appears only for particles of very small mass, such as electrons and neutrons.

PROBLEM (C): COMPTON SCATTERING

Data: incident wavelength λ = 0.5 Å, scattering angle θ = 60°.

Compton shift: $\Delta\lambda = (h/m_0c)(1 - \cos\theta)$, where h/m_0c = 0.02426 Å is the Compton wavelength of the electron.

Calculation: Δλ = 0.02426 × (1 − cos 60°) = 0.02426 × 0.5 = **0.0121 Å.**

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Scattered wavelength: $\lambda' = 0.5 + 0.0121 =$ **0.5121 Å.**

Energy given to the recoiling electron: it equals the loss in photon energy,

$K = hc(1/\lambda - 1/\lambda') = 12400 \times (1/0.5 - 1/0.5121) = 24800 - 24213 \approx$ **587 eV.**

Comment: the shift is independent of the incident wavelength and depends only on the angle. Its maximum value is $2h/m_0c = 0.0485$ Å, at $\theta = 180°$. Only about 2.4% of the photon energy goes to the electron here, because λ is large compared with the Compton wavelength.

PROBLEM (D): THERMAL NEUTRONS AT 300 K

Formula: the mean kinetic energy of a particle in thermal equilibrium is $E = (3/2)\,kT$, and $\lambda = h/\sqrt{(2mE)}$.

Calculation of energy: $E = 1.5 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}$ J = **0.0388 eV.**

Wavelength: $\lambda = 6.626 \times 10^{-34} / \sqrt{(2 \times 1.675 \times 10^{-27} \times 6.21 \times 10^{-21})}$

$= 6.626 \times 10^{-34} / 4.56 \times 10^{-24} = 1.45 \times 10^{-10}$ m = **1.45 Å.**

Comment: a thermal neutron has a wavelength close to atomic spacing, so neutron diffraction is used to study crystal structures and magnetic order in solids.

SUMMARY TABLE

Problem	Quantity	Answer
(a)	λ of 150 V electron	1.00 Å
(b)	λ of cricket ball	3.3×10^{-34} m
(c)	Compton shift; recoil energy	0.0121 Å; 587 eV
(d)	λ of thermal neutron	1.45 Å

CONCLUSION

These results show when wave behaviour matters: only when the de Broglie wavelength is comparable with the size of the structure the particle interacts with. For electrons and neutrons it is of atomic size, and for large objects it is far too small to observe.

Q.4 · Unit 2 10 marks · ≈ 600–700 words

Solve the following problems on the uncertainty principle: (a) the minimum uncertainty in the position of an electron moving at 5×10^3 m/s with its speed known to 0.003%; (b) the spectral width of a line from a state of lifetime 10^{-8} s; (c) the uncertainty in the position of a 10 g bullet; (d) the mass of the exchanged particle if the nuclear force has a range of 1.4 fm.

INTRODUCTION

Heisenberg's uncertainty principle states that a particle's position and momentum cannot both be known exactly at the same time, and that energy and time are similarly linked:

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ and $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$, where $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}$ J s.

In order-of-magnitude problems the relations are often written with $\hbar$ in place of $\hbar/2$, and the question usually states which form to use. Here the exact minimum form $\hbar/2$ is used, except in part (d), which is an estimate.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Constants: $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J s, m (electron) = 9.11×10^{-31} kg, 1 eV = 1.602×10^{-19} J, $\hbar c$ = 197.3 MeV fm.

PROBLEM (A): ELECTRON WITH SPEED KNOWN TO 0.003%

Data: $v = 5 \times 10^3$ m/s, uncertainty in speed = 0.003% = 3×10^{-5} of v.

Momentum: $p = mv = 9.11 \times 10^{-31} \times 5 \times 10^3 = 4.555 \times 10^{-27}$ kg m/s.

Uncertainty in momentum: $\Delta p = 3 \times 10^{-5} \times 4.555 \times 10^{-27} = 1.37 \times 10^{-31}$ kg m/s.

Minimum uncertainty in position:

$\Delta x \geq \hbar/(2\Delta p) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 1.37 \times 10^{-31}) =$ **3.9×10^{-4} m ≈ 0.39 mm.**

Comment: the electron's position is uncertain by about 0.4 mm, which is huge on the atomic scale (10^{-10} m). Precise knowledge of momentum means a very vague position.

PROBLEM (B): WIDTH OF A SPECTRAL LINE

Data: lifetime of the excited state $\Delta t = 10^{-8}$ s.

Energy uncertainty: $\Delta E \geq \hbar/(2\Delta t) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-8}) = 5.27 \times 10^{-27}$ J = $5.27 \times 10^{-27} / 1.602 \times 10^{-19} =$ **3.3×10^{-8} eV.**

Frequency width: $\Delta\nu = \Delta E/h = 1/(4\pi\Delta t) = 1 / (4\pi \times 10^{-8}) =$ **8.0×10^6 Hz ≈ 8 MHz.**

Comment: the excited level is slightly 'smeared' in energy, so the emitted line has a natural width of about 8 MHz, tiny compared with the optical frequency of about 10^{15} Hz. A state with a longer life gives a sharper line, and the ground state, whose life is infinite, has an exactly defined energy.

PROBLEM (C): A BULLET

Data: m = 10 g = 0.01 kg, assume the speed is known to $\Delta v = 10^{-6}$ m/s, which is an extremely accurate measurement.

Δp: $m\Delta v = 0.01 \times 10^{-6} = 10^{-8}$ kg m/s.

Δx: $\hbar/(2\Delta p) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-8}) =$ **5.3×10^{-27} m.**

Comment: this is about 10^{11} times smaller than a proton. It is far below any possible measurement, so for macroscopic objects the uncertainty principle has no practical effect, and classical physics works. This is the correspondence principle in action.

PROBLEM (D): RANGE OF THE NUCLEAR FORCE

Idea (Yukawa): the nuclear force between nucleons is carried by an exchanged particle. A particle of rest energy mc^2 can be 'borrowed' from the vacuum for a time $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$, with $\Delta E = mc^2$. In that time it can travel at most a distance $R \approx c\Delta t$.

Estimate: $R \approx c\hbar/(mc^2)$, hence **$mc^2 \approx \hbar c/R$.**

With R = 1.4 fm: $mc^2 \approx 197.3$ MeV fm / 1.4 fm ≈ **141 MeV**, that is, about **275 times the electron mass.**

Comment: this is close to the observed mass of the pion, 139.6 MeV/c^2, which was discovered in 1947. The prediction is a famous example of the energy-time uncertainty relation.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

SUMMARY TABLE

Part	Result
(a)	$\Delta x \geq 3.9 \times 10^{-4}$ m
(b)	$\Delta E \geq 3.3 \times 10^{-8}$ eV; $\Delta\nu \approx 8$ MHz
(c)	$\Delta x \geq 5.3 \times 10^{-27}$ m
(d)	$mc^2 \approx 141$ MeV

CONCLUSION

The uncertainty principle is a basic feature of nature, not a fault of instruments. It is important for electrons and nuclei, where the numbers are significant, and unnoticeable for everyday objects.

Q.4 (OR) · Unit 2 10 marks · ≈ 600–700 words

Derive the general uncertainty relation $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|$ for two Hermitian operators. Hence obtain $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ and explain when two observables can be measured together exactly.

INTRODUCTION

The uncertainty principle can be explained by thought experiments such as the gamma-ray microscope, but its exact mathematical form comes from the formalism of quantum mechanics. It shows that uncertainty is not caused by a clumsy measurement: it arises because the operators for the two quantities **do not commute**.

NOTATION AND DEFINITIONS

- A and B are Hermitian operators representing two observables, and ψ is a normalised state.
- The **expectation value** is $\langle A\rangle = \int \psi^* A \psi \, dx$.
- Define the deviation operator $\delta A = A - \langle A\rangle$. The **uncertainty (standard deviation)** is

$$(\Delta A)^2 = \langle(\delta A)^2\rangle = \int \psi^* (\delta A)^2 \psi \, dx.$$

- The **commutator** is $[A, B] = AB - BA$.

DERIVATION

Step 1: two new functions. Let $f = \delta A \, \psi$ and $g = \delta B \, \psi$. Because δA is Hermitian,

$\langle f|f\rangle = \int (\delta A\psi)^*(\delta A\psi) \, dx = \langle(\delta A)^2\rangle = (\Delta A)^2$, and similarly $\langle g|g\rangle = (\Delta B)^2$.

Step 2: Schwarz inequality. For any two functions, $\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$. Hence

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2 = |\langle \delta A \, \delta B\rangle|^2.$$

Step 3: split the product. Any product of operators can be written as half the sum of its anticommutator and half the commutator:

$\delta A \, \delta B = \frac{1}{2}(\delta A \, \delta B + \delta B \, \delta A) + \frac{1}{2}(\delta A \, \delta B - \delta B \, \delta A)$.

Since δA and δB differ from A and B by numbers only, $[\delta A, \delta B] = [A, B]$. So

$\langle \delta A \, \delta B\rangle = \frac{1}{2}\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle + \frac{1}{2}\langle[A, B]\rangle$.

Step 4: real and imaginary parts. The expectation value of the anticommutator of two Hermitian operators is **real**. The commutator [A, B] of two Hermitian operators is anti-Hermitian, so its expectation value is **purely imaginary**. For a complex number $z = a + ib$, $|z|^2 = a^2 + b^2$, therefore

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Squaring: $|\langle \delta A\, \delta B\rangle|^2 = \tfrac{1}{4}\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle^2 + \tfrac{1}{4}|\langle [A, B]\rangle|^2 \geq \tfrac{1}{4}|\langle [A, B]\rangle|^2$.

Step 5: result. Combining Steps 2 and 4 and taking the square root,

$\Delta A \cdot \Delta B \geq \tfrac{1}{2}\,|\langle [A, B]\rangle|$.

This is the general uncertainty relation of Robertson.

APPLICATION TO POSITION AND MOMENTUM

Take A = x and B = p = $-i\hbar\, d/dx$. For any function ψ,

$[x, p]\psi = x(-i\hbar\,\psi') - (-i\hbar)(x\psi)' = -i\hbar\, x\psi' + i\hbar(\psi + x\psi') =$ **$i\hbar\,\psi$.**

Therefore $[x, p] = i\hbar$, a constant, and $\langle [x, p]\rangle = i\hbar$. Substituting,

$\Delta A\, \Delta B \geq \tfrac{1}{2}\,|i\hbar|$, that is, **$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.**

The right side does not depend on the state, which is why the relation is universal.

OTHER EXAMPLES

Pair	Commutator	Result
x and px	$i\hbar$	$\Delta x\, \Delta px \geq \hbar/2$
Lx and Ly	$i\hbar$ Lz	$\Delta Lx\, \Delta Ly \geq (\hbar/2) \times \text{abs}(\langle Lz\rangle)$
x and py	0	no lower limit
Energy H and time	(time is a parameter, not an operator)	$\Delta E\, \Delta t \gtrsim \hbar/2$ is derived differently

COMPATIBLE AND INCOMPATIBLE OBSERVABLES

- If **[A, B] = 0**, the operators have a common set of eigenfunctions and both quantities can have exact values at the same time. They are **compatible**, for example x and py, or the components of position, or H and L^2 for a central potential.
- If **[A, B] ≠ 0**, there are no common eigenfunctions in general, and the quantities are **incompatible**: sharpening one makes the other uncertain.

PHYSICAL MEANING

Uncertainty belongs to the **state**, not to the apparatus. Even a perfect instrument cannot give a state in which both x and p have zero spread. It explains why an electron in an atom cannot sit at rest at the nucleus, and why atoms have a minimum energy.

CONCLUSION

By using the Schwarz inequality and the commutator we obtain a general uncertainty relation that connects any two observables. Applied to x and p it gives Heisenberg's relation exactly, and it shows that the root of quantum uncertainty is the non-commutation of operators.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Q.5 · Unit 3 10 marks · ≈ 600–700 words

Why must a wave function be normalised? Normalise (a) ψ = A x(L − x) for 0 ≤ x ≤ L, (b) ψ = A e^(−a|x|) and (c) ψ = A e^(−x²/2σ²), and find ⟨x⟩, ⟨x²⟩ and Δx for each.

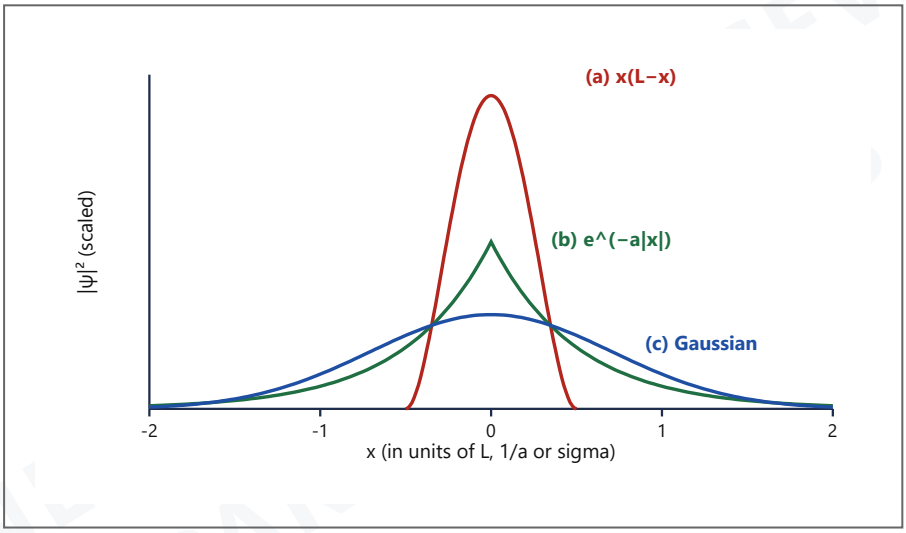
INTRODUCTION

According to Born's interpretation, $|\psi(x)|^2\,dx$ is the probability of finding the particle between x and x + dx. A particle must be found somewhere, so the total probability must be 1. This is the **normalisation condition:**

$\int |\psi|^2\,dx = 1$ (over all space where $\psi \neq 0$).

If a solution ψ of the Schrödinger equation does not satisfy this, we multiply it by a constant A, found from the condition. Since the equation is linear, Aψ is also a solution. A function whose integral of $|\psi|^2$ is infinite cannot be normalised and cannot describe a single particle.

Also, the **expectation value** of a quantity is $\langle x\rangle = \int x\,|\psi|^2\,dx$ and the uncertainty is **$\Delta x = \sqrt{(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)}$**.



Probability densities

PROBLEM (A): ψ = A X(L − X), 0 ≤ X ≤ L (ZERO OUTSIDE)

Normalisation: $A^2 \int_0^L x^2(L-x)^2\,dx = 1$.

Expanding, $x^2(L-x)^2 = L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4$, and integrating gives $L^2\cdot L^3/3 - 2L\cdot L^4/4 + L^5/5 = L^5(1/3 - 1/2 + 1/5) = \mathbf{L^5/30}$.

So $A^2\,L^5/30 = 1$, hence **$A = \sqrt{(30/L^5)}$.**

⟨x⟩: $|\psi|^2$ is symmetric about x = L/2, so **⟨x⟩ = L/2.**

⟨x²⟩: $(30/L^5)\int_0^L x^4(L-x)^2\,dx = (30/L^5)\times L^7\,[1/5 - 2/6 + 1/7] = 30L^2 \times (1/105) = \mathbf{2L^2/7}$.

Δx: $\Delta x^2 = 2L^2/7 - L^2/4 = L^2/28$, so **$\Delta x = L/\sqrt{28} \approx 0.19\,L$.**

Probability in the left half, 0 to L/2: by symmetry it is **1/2**.

PROBLEM (B): ψ = A E^(−A|X|), A > 0

Here $|\psi|^2 = A^2\,e^{-2a|x|}$ is even in x, so integrate from 0 to ∞ and double.

Normalisation: $2A^2\int_0^{\infty} e^{-2ax}\,dx = 2A^2 \times 1/(2a) = A^2/a = 1$, hence **$A = \sqrt{a}$.**

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

⟨x⟩: the integrand $x|\psi|^2$ is odd, so **⟨x⟩ = 0.**

⟨x²⟩: $2a \int_0^{\infty} x^2 e^{-2ax}\, dx = 2a \times 2!/(2a)^3 =$ **$1/(2a^2)$.**

Δx: $\Delta x = 1/(\sqrt{2}\, a) \approx 0.71/a$.

Probability of finding the particle within $|x| < 1/a$: $2a \int_0^{1/a} e^{-2ax}\, dx = 1 - e^{-2} =$ **0.865.**

Note that ψ has a cusp at x = 0, so dψ/dx is not continuous there. This is allowed only if the potential is infinite at that point, for example a delta-function potential.

PROBLEM (C): $\psi = A\, E^{-X^2/2\sigma^2}$, $-\infty < X < \infty$

Normalisation: $A^2 \int e^{-x^2/\sigma^2}\, dx = A^2\, \sigma\sqrt{\pi} = 1$, using $\int e^{-x^2/\sigma^2}\, dx = \sigma\sqrt{\pi}$. So **$A = (\pi\sigma^2)^{-1/4}$.**

⟨x⟩ = 0 since the integrand is odd.

⟨x²⟩: $A^2 \int x^2 e^{-x^2/\sigma^2}\, dx = A^2 \times (\sigma^3\sqrt{\pi})/2 =$ **$\sigma^2/2$.**

$\Delta x = \sigma/\sqrt{2} \approx 0.71\sigma$.

For this Gaussian the momentum uncertainty is $\Delta p = \hbar/(\sqrt{2}\sigma)$, so **$\Delta x\, \Delta p = \hbar/2$**, the minimum allowed. The Gaussian is a minimum-uncertainty wave packet.

SUMMARY TABLE

Function	A	⟨x⟩	⟨x²⟩	Δx
(a) A x(L − x)	$\sqrt{(30/L^5)}$	L/2	$2L^2/7$	$L/\sqrt{28}$
(b) A exp(−a × abs x)	$\sqrt{a}$	0	$1/(2a^2)$	$1/(\sqrt{2}\, a)$
(c) A $e^{-x^2/2\sigma^2}$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}$	0	$\sigma^2/2$	$\sigma/\sqrt{2}$

CHECKS ON THE ANSWERS

- A has the unit of $1/\sqrt{\text{length}}$, so that $A^2 \cdot (\text{length})$ is dimensionless.
- Δx comes out as a positive number, and for (a) it is smaller than the box width L as it must be.
- In (a) and (b) ψ is finite, single-valued and continuous, so they are acceptable wave functions.

CONCLUSION

Normalisation turns a solution of the Schrödinger equation into a probability amplitude. Once ψ is normalised, expectation values and uncertainties can be obtained by simple integration, as shown above.

Q.5 (OR) · Unit 3 10 marks · ≈ 600–700 words

Derive the equation of motion $d\langle A\rangle/dt = (i/\hbar)\langle[H, A]\rangle$ for the expectation value of an operator. Hence prove Ehrenfest's theorem and discuss its link with classical mechanics.

INTRODUCTION

The expectation value ⟨A⟩ of an observable is the average of many measurements on identical systems in the state ψ. In classical mechanics, a particle follows a definite path obeying Newton's laws. Paul Ehrenfest showed in 1927 that **the averages** of quantum quantities obey equations that closely resemble Newton's laws. This explains how the classical world emerges from quantum mechanics.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

STEP 1: TIME DERIVATIVE OF AN EXPECTATION VALUE

Let A be an operator that does not depend on time explicitly, and $\psi(x, t)$ a normalised solution of

$i\hbar\, \partial\psi/\partial t = H\psi$.

Taking the complex conjugate and using the fact that H is Hermitian:

$\partial\psi/\partial t = -(i/\hbar)\, H\psi$ and $\partial\psi^*/\partial t = +(i/\hbar)\, (H\psi)^*$.

Now $\langle A\rangle = \int \psi^*\, A\, \psi\, dx$, so

$d\langle A\rangle/dt = \int (\partial\psi^*/\partial t)\, A\psi\, dx + \int \psi^*\, A\, (\partial\psi/\partial t)\, dx$

$= (i/\hbar) \int (H\psi)\, A\psi\, dx - (i/\hbar) \int \psi\, A\, H\psi\, dx$.

Because H is Hermitian, $\int (H\psi)\, A\psi\, dx = \int \psi\, H\, A\, \psi\, dx$. Therefore

$d\langle A\rangle/dt = (i/\hbar) \int \psi^* (HA - AH)\, \psi\, dx = (i/\hbar)\, \langle [H, A]\rangle$.

(If A also depends on time explicitly, the term $\langle \partial A/\partial t\rangle$ is added.)

Consequence: if A commutes with H, $\langle A\rangle$ does not change with time, so A is a **conserved quantity**. For A = H, [H, H] = 0, which expresses conservation of energy.

STEP 2: MOTION OF $\langle X\rangle$

Take $H = p^2/2m + V(x)$ and A = x.

- $[V, x] = 0$, since V(x) is only a function of x.
- $[p^2, x] = p[p, x] + [p, x]p = p(-i\hbar) + (-i\hbar)p = -2i\hbar\, p$.

So $[H, x] = (1/2m)(-2i\hbar\, p) = -i\hbar\, p/m$. Substituting,

$d\langle x\rangle/dt = (i/\hbar)(-i\hbar\, \langle p\rangle/m) =$ **$\langle p\rangle/m$.**

This is the quantum form of **velocity = momentum / mass**.

STEP 3: MOTION OF $\langle P\rangle$

Take $A = p = -i\hbar\, d/dx$.

- $[p^2, p] = 0$.
- $[V, p]\psi = V(-i\hbar\psi') - (-i\hbar)(V\psi)' = i\hbar\, V'\, \psi$, so $[V, p] = i\hbar\, dV/dx$.

Then $[H, p] = i\hbar\, dV/dx$ and

$d\langle p\rangle/dt = (i/\hbar)(i\hbar\, \langle dV/dx\rangle) =$ **$-\langle dV/dx\rangle$.**

This is the quantum form of **force = −dV/dx**, Newton's second law.

EHRENFEST'S THEOREM

$d\langle x\rangle/dt = \langle p\rangle/m$ and $d\langle p\rangle/dt = -\langle V'(x)\rangle$.

Combining them, $m\, d^2\langle x\rangle/dt^2 = -\langle V'(x)\rangle$.

RELATION WITH CLASSICAL MECHANICS

Newton's law would read $m\, d^2x/dt^2 = -V'(x)$, with the force evaluated at the point **$\langle x\rangle$**, that is, $V'(\langle x\rangle)$. The quantum result has the **average of the force** $\langle V'(x)\rangle$. These are equal only when $\langle V'(x)\rangle = V'(\langle x\rangle)$.

ONLINE STUDENT SEVA PARIKSHA PASS

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Potential	V′(x)	Result
Free particle V = 0	0	⟨p⟩ constant, ⟨x⟩ moves uniformly
Uniform force V = −Fx	−F	⟨x⟩ follows the exact classical path
Harmonic oscillator V = ½kx^2	kx	m d^2⟨x⟩/dt^2 = −k⟨x⟩, exactly classical SHM
Anharmonic, e.g. V = x^4	4x^3	⟨x^3⟩ ≠ ⟨x⟩^{3}, so the equations differ from Newton's

For potentials that are constant, linear or quadratic, the mean position follows the classical path exactly. For other potentials the difference depends on the spread of the wave packet. When the packet is **narrow** compared with the distance over which the force changes, ⟨V′(x)⟩ ≈ V′(⟨x⟩) and the packet moves like a classical particle. This is true for macroscopic bodies, which is why Newtonian mechanics works for them. This is an example of the **correspondence principle**.

CONCLUSION

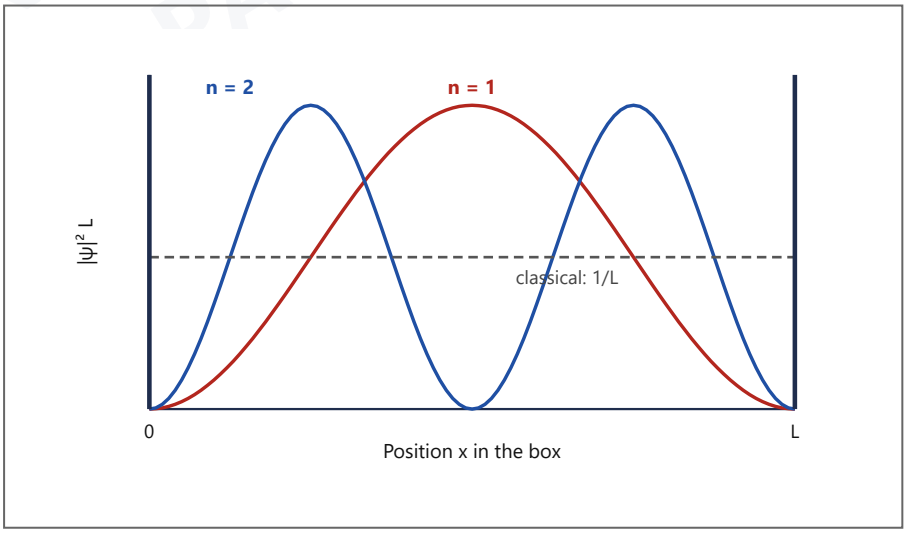
Ehrenfest's theorem shows that quantum mechanics contains classical mechanics as a limit. The averages of quantum quantities obey Newton-like equations, and the classical description fails only when the wave packet is spread over a region where the potential changes appreciably.

Q.6 · Unit 4 10 marks · ≈ 600–700 words

For a particle in a one-dimensional infinite box of width L, calculate ⟨x⟩, ⟨x^2⟩, ⟨p⟩, ⟨p^2⟩ and the uncertainties Δx and Δp in the n-th state. Verify the uncertainty principle and show that the result approaches the classical one for large n.

INTRODUCTION

The particle in a box has the normalised wave functions $\psi_n(x) = \sqrt{(2/L)}\,\sin(n\pi x/L)$, 0 ≤ x ≤ L, with energies $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$. Once the wave function is known, every measurable property is found as an expectation value $\langle Q\rangle = \int \psi_n^*\, Q\, \psi_n\, dx$. Here we find the mean and the spread of position and momentum, and test them against the uncertainty principle.



Probability density in a box for n = 1 and n = 2 compared with the classical uniform distribution 1/L

POSITION

⟨x⟩: $|\psi_n|^2 = (2/L)\sin^2(n\pi x/L)$ is symmetric about the centre of the box, so

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

$\langle x \rangle = L/2$ for every n.

$\langle x^2 \rangle$: use $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$:

$\langle x^2 \rangle = (1/L) \int_0^L x^2 [1 - \cos(2n\pi x/L)] \, dx = L^2/3 - (1/L) \int_0^L x^2 \cos(2n\pi x/L) \, dx$.

Integrating by parts (the sine terms vanish at x = 0 and x = L), $\int_0^L x^2 \cos(2n\pi x/L) \, dx = L^3/(2n^2\pi^2)$. Hence

$\langle x^2 \rangle = L^2 (1/3 - 1/(2n^2\pi^2))$.

Uncertainty in position: $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = L^2(1/3 - 1/(2n^2\pi^2) - 1/4)$, so

$\Delta x = L \sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))}$.

MOMENTUM

$\langle p \rangle$: with $p = -i\hbar \, d/dx$, $\langle p \rangle = (2/L)(-i\hbar)(n\pi/L) \int_0^L \sin(n\pi x/L) \cos(n\pi x/L) \, dx = 0$, because the integral of sin·cos over complete half-waves is zero. So **$\langle p \rangle = 0$**. This is as expected, since the standing wave is a superposition of waves moving in the two opposite directions equally.

$\langle p^2 \rangle$: $p^2\psi_n = -\hbar^2 \, d^2\psi_n/dx^2 = \hbar^2(n\pi/L)^2 \, \psi_n$, so ψ_n is an eigenfunction of p^2, and

$\langle p^2 \rangle = n^2\pi^2\hbar^2/L^2$.

(This is just $2mE_n$, since the potential energy inside the box is zero.)

Uncertainty in momentum: $\Delta p = \sqrt{(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)} =$ **$n\pi\hbar/L$.**

VERIFICATION OF THE UNCERTAINTY PRINCIPLE

$\Delta x \cdot \Delta p = L \sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))} \times n\pi\hbar/L = \hbar \sqrt{(n^2\pi^2/12 - 1/2)} = (\hbar/2) \sqrt{(n^2\pi^2/3 - 2)}$.

n	$\sqrt{(n^2\pi^2/3 - 2)}$	$\Delta x \cdot \Delta p$
1	1.136	0.568 ħ
2	3.341	1.670 ħ
3	5.254	2.627 ħ

In each case $\Delta x \cdot \Delta p$ is greater than $\hbar/2 = 0.5$ ħ, so the uncertainty principle is satisfied. The smallest product is for n = 1 (0.568 ħ), which is close to the minimum allowed value. As n rises, Δp grows in proportion to n while Δx becomes nearly constant, so the product increases.

CLASSICAL LIMIT FOR LARGE N

- As $n \to \infty$ the term $1/(2n^2\pi^2) \to 0$, so $\langle x^2 \rangle \to L^2/3$ and $\Delta x \to L/\sqrt{12} \approx 0.289$ L. These are the values for a particle equally likely to be anywhere in the box, which is the classical result for a particle bouncing between the walls.
- The rapid oscillations of $\sin^2(n\pi x/L)$ average out, and the quantum density tends to the uniform classical density $1/L$.
- **Example:** probability of finding the particle in the left quarter 0 to L/4 is $P = 1/4 - \sin(n\pi/2)/(2n\pi)$. For n = 1, P = 0.25 − 0.159 = **0.091**, much smaller than the classical value 0.25. For n = 2, P = **0.25**, equal to the classical value. For large n, $P \to 0.25$.

CONCLUSION

In the n-th state $\langle x \rangle = L/2$, $\langle p \rangle = 0$, $\Delta x = L\sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))}$ and $\Delta p = n\pi\hbar/L$. Their product always exceeds $\hbar/2$, and for large n the quantum results approach the classical ones, in agreement with Bohr's correspondence principle.

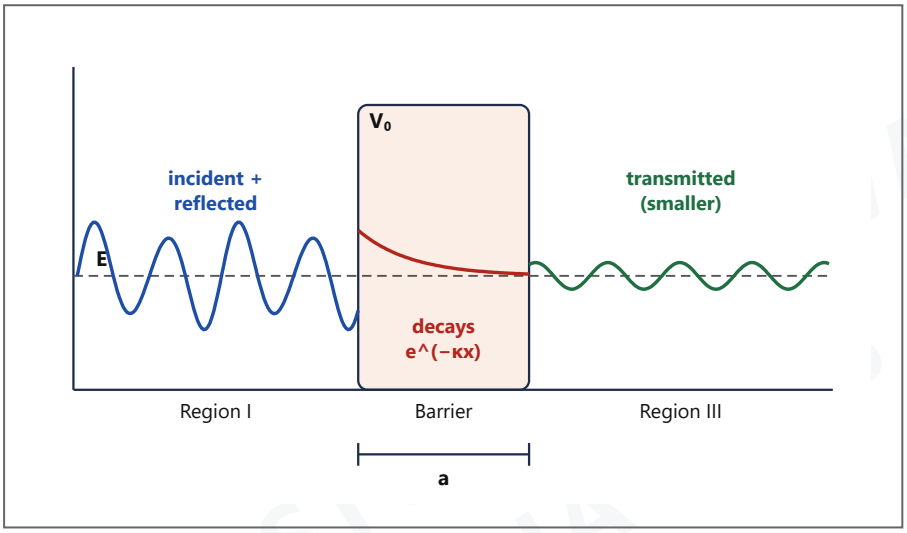
© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Q.6 (OR) · Unit 4 10 marks · ≈ 600–700 words

Using the transmission coefficient of a rectangular barrier, calculate the tunnelling probability for a 1 eV electron meeting a 2 eV barrier of width 0.5 nm and 1 nm. Explain how tunnelling accounts for alpha decay and works in the scanning tunnelling microscope.

INTRODUCTION

In classical physics, a particle of energy E cannot cross a barrier of height $V_0 > E$. In quantum mechanics the wave function does not stop abruptly at the barrier. Inside the barrier it **decays exponentially**, and if the barrier is thin enough, a small part of the wave emerges on the other side. This leakage is called **tunnelling** or barrier penetration.



A particle wave meets a rectangular barrier: oscillating on the left, decaying inside, smaller in amplitude on the right

TRANSMISSION COEFFICIENT

For a barrier of height V_0 and width a, and $E < V_0$, the Schrödinger equation gives inside the barrier $\psi \propto e^{\pm \kappa x}$, where

$$\kappa = \sqrt{(2m(V_0 - E))} / \hbar.$$

The exact transmission probability is

$$T = [1 + V_0^2 \sinh^2(\kappa a) / (4E(V_0 - E))]^{-1}.$$

For a thick barrier ($\kappa a \gg 1$) this becomes the useful approximation

$$T \approx 16\,(E/V_0)(1 - E/V_0)\, e^{-2\kappa a}.$$

T falls **exponentially** with the width a, with the square root of the mass, and with $\sqrt{(V_0 - E)}$.

NUMERICAL PROBLEM

Data: E = 1 eV, V_0 = 2 eV, so $V_0 - E$ = 1 eV; electron mass m = 9.11×10^{-31} kg.

Step 1: κ. $\kappa = \sqrt{(2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.602 \times 10^{-19})} / 1.055 \times 10^{-34} = 5.12 \times 10^{9}$ m^{-1} = **5.12 nm^{-1}.**

(A handy value: $\kappa = 5.12$ nm$^{-1} \times \sqrt{(V_0 - E \text{ in eV})}$.)

Step 2: prefactor. $16\,(E/V_0)(1 - E/V_0) = 16 \times 0.5 \times 0.5 = 4$.

(i) Width a = 0.5 nm: $2\kappa a = 2 \times 5.12 \times 0.5 = 5.12$.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

$T \approx 4 \times e^{-5.12} = 4 \times 5.96 \times 10^{-3} =$ **0.024**, about **2.4%**.

(ii) Width a = 1 nm: $2\kappa a = 10.25$.

$T \approx 4 \times e^{-10.25} = 4 \times 3.55 \times 10^{-5} =$ $\mathbf{1.4 \times 10^{-4}}$, about 0.014%.

(The exact formula gives 0.0235 and 1.42×10^{-4}, which agree closely with these values.)

Comment: doubling the width reduces the probability by a factor of about 170. Tunnelling is therefore significant only over atomic distances (about 1 nm or less) for electrons, and for heavier particles it is much smaller.

APPLICATION 1: ALPHA DECAY

An alpha particle in a heavy nucleus is held by the strong nuclear force and faces a Coulomb barrier as it tries to leave. For uranium-238, the barrier is higher than the alpha's energy of 4.27 MeV, so classically it could never escape. George Gamow explained in 1928 that the alpha tunnels through the barrier, with a very small probability each time it strikes the wall.

- The transmission probability depends exponentially on the barrier width and height, so the **half-life is extremely sensitive to the alpha energy** (the Geiger-Nuttall rule).
- **Uranium-238** emits 4.27 MeV alphas and has a half-life of 4.5×10^9 years (about 1.4×10^{17} s). **Polonium-212** emits 8.78 MeV alphas and has a half-life of only 0.3 microseconds. An energy difference of a factor of 2 changes the half-life by about 10^{23} times.

APPLICATION 2: SCANNING TUNNELLING MICROSCOPE (STM)

A sharp metal tip is brought to within about 0.5 nm of a conducting surface, and a small voltage is applied. Electrons tunnel across the vacuum gap, giving a current $\mathbf{I \propto e^{-2\kappa d}}$, where d is the gap and κ is determined by the work function φ.

Sensitivity: for $\varphi \approx 4.5$ eV, $\kappa = 5.12 \times \sqrt{4.5} = 10.9$ nm^{-1}. If the gap changes by 0.1 nm, the current changes by a factor of $e^{2 \times 10.9 \times 0.1} = e^{2.17} \approx$ **9**, nearly one order of magnitude. A change of just 0.01 nm changes the current by about 24%, which is easily measured. This is why an STM can map surfaces with a vertical resolution much finer than the size of an atom, and it can even move individual atoms.

OTHER USES

- **Tunnel diode** and Josephson junction.
- **Flash memory**, in which electrons tunnel through a thin oxide layer to store charge.
- **Nuclear fusion in the Sun**, where protons tunnel through their mutual Coulomb repulsion at a temperature lower than that needed classically.

CONCLUSION

Tunnelling follows directly from the wave nature of matter. The probability falls exponentially with barrier width and height, which explains both the huge range of alpha-decay half-lives and the extreme sensitivity of the STM.

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

भाग – II : हिन्दी माध्यम – आदर्श उत्तर

प्रत्येक उत्तर अंक-भार के अनुसार लिखा गया है — ढाँचा सीखें, फिर अपने शब्दों में लिखें।

खण्ड – अ · प्रश्न 1 : उत्तर कुंजी

क्र.	उत्तर	सही विकल्प	स्पष्टीकरण
1	(b)	आधी	चूँकि λ_{max}, T के व्युत्क्रमानुपाती है, T दोगुना करने पर λ_{max} आधी हो जाती है। वक्र का शिखर छोटी तरंगदैर्घ्य की ओर खिसकता है।
2	(b)	3.1 eV	$E = hc/\lambda = 12400 / 4000 = 3.1$ eV।
3	(b)	उसकी डी-ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य उसके आकार की तुलना में अत्यंत छोटी होती है	गेंद के लिए $\lambda = h/mv$ लगभग 10^{-34} m होती है, जो किसी मापने योग्य विवर्तन या व्यतिकरण के लिए बहुत छोटी है।
4	(a)	5.3×10^{-25} kg m/s	$\Delta p = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-10}) = 5.3 \times 10^{-25}$ kg m/s।
5	(c)	अनंत (स्थिति पूर्णतः अनिर्धारित)	$\Delta x\, \Delta p \geq \hbar/2$। यदि $\Delta p = 0$ हो तो यह तभी संतुष्ट हो सकता है जब $\Delta x \to \infty$। आदर्श समतल तरंग समस्त समष्टि में फैली होती है।
6	(c)	$i\hbar$	किसी फलन पर संकारकों को लगाने से $[x, p_x]\psi = i\hbar\psi$ मिलता है। क्रमविनिमेयक शून्य नहीं है, इसलिए x और p_x के एक साथ सटीक मान नहीं हो सकते।
7	(b)	समय से स्वतंत्र	$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{(-iEt/\hbar)}$ होता है और समय-गुणक का मापांक 1 है, इसलिए $\lvert\Psi\rvert^2 = \lvert\psi(x)\rvert^2$ समय के साथ नहीं बदलता।
8	(d)	शून्य	$J = (\hbar/2mi)(\psi^* d\psi/dx - \psi\, d\psi^*/dx)$। वास्तविक ψ के लिए $\psi^* = \psi$ होता है और दोनों पद कट जाते हैं, इसलिए $J = 0$। बद्ध स्थिर अवस्थाओं में प्रायिकता का कोई शुद्ध प्रवाह नहीं होता।
9	(b)	2	$\psi_n = \sqrt{(2/L)}\sin(n\pi x/L)$ में बॉक्स के भीतर $(n - 1)$ नोड होते हैं। $n = 3$ के लिए 2 नोड हैं, $x = L/3$ और $2L/3$ पर।
10	(a)	अवरोध की चौड़ाई बढ़ाई जाए	T लगभग $e^{(-2\kappa a)}$ होता है, जहाँ $\kappa = \sqrt{(2m(V_0 - E))}/\hbar$। अधिक चौड़ा अवरोध (बड़ा a), भारी कण या ऊँचा अवरोध T को चरघातांकी रूप से घटा देता है।

खण्ड – अ · प्रश्न 2 : लघु उत्तर

प्रश्न 2(a) — 5 अंक · शब्द-सीमा ≈ 150–170 शब्द

प्लांक की क्वांटम परिकल्पना बताइए। इसने कृष्णिका विकिरण की समस्या कैसे हल की?

1900 में मैक्स प्लांक ने प्रस्ताव रखा कि पदार्थ और विकिरण ऊर्जा का आदान-प्रदान केवल असतत पैकेटों, जिन्हें क्वांटा कहते हैं, में करते हैं।

- **क्वांटम की ऊर्जा:** $E = h\nu$, जहाँ $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s प्लांक नियतांक है।
- **दोलित्र:** कृष्णिका की दीवारों के परमाणवीय दोलित्रों की ऊर्जा केवल 0, hν, 2hν, 3hν … nhν हो सकती है, और वे पूरे क्वांटा में ऊर्जा उत्सर्जित या अवशोषित करते हैं।
- **परिणाम:** वर्णक्रमीय ऊर्जा घनत्व $u(\nu) = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot 1/(e^{h\nu/kT} - 1)$ होता है।
- **सफलता:** कम ν पर यह रेले-जीन्स नियम और अधिक ν पर वीन नियम देता है, और चिरसम्मत सिद्धांत की 'पराबैंगनी विपदा' मिटा देता है क्योंकि उच्च-आवृत्ति विधाएँ उत्तेजित करना कठिन है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

यही क्वांटम सिद्धांत का आरंभ था।

प्रश्न 2(b) 5 अंक · शब्द-सीमा ≈ 150–170 शब्द

3000 Å तरंगदैर्घ्य का प्रकाश 2.3 eV कार्य-फलन वाली धातु पर पड़ता है। प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम गतिज ऊर्जा, निरोधी विभव और देहली तरंगदैर्घ्य ज्ञात कीजिए (hc = 12400 eV Å)।

दिया है: $\lambda = 3000$ Å, $\varphi = 2.3$ eV, $hc = 12400$ eV Å।

फोटॉन ऊर्जा: $E = hc/\lambda = 12400 / 3000 = 4.13$ eV।

आइंस्टीन समीकरण: $KE_{max} = E - \varphi = 4.13 - 2.3 =$ **1.83 eV**।

निरोधी विभव: $eV_0 = KE_{max}$, अतः $\mathbf{V_0 = 1.83\ V}$।

देहली तरंगदैर्घ्य: $\lambda_0 = hc/\varphi = 12400 / 2.3 = 5391$ Å, अर्थात **लगभग 5390 Å**।

5390 Å से अधिक तरंगदैर्घ्य का प्रकाश, जैसे लाल या पीला, इस धातु से प्रकाश-उत्सर्जन नहीं करेगा, चाहे वह कितना भी तीव्र हो, क्योंकि तब प्रत्येक फोटॉन की ऊर्जा φ से कम होती है।

प्रश्न 2(c) 5 अंक · शब्द-सीमा ≈ 150–170 शब्द

एक इलेक्ट्रॉन लगभग 1 Å आकार के परमाणु में सीमित है। अनिश्चितता सिद्धांत से इलेक्ट्रॉन की न्यूनतम गतिज ऊर्जा का आकलन कीजिए।

दिया है: $\Delta x \approx 1$ Å $= 10^{-10}$ m।

संवेग की अनिश्चितता: $\Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-10}) = 5.3 \times 10^{-25}$ kg m/s।

न्यूनतम संवेग: इलेक्ट्रॉन का p कम से कम इसी कोटि का होना चाहिए।

गतिज ऊर्जा: $K = p^2/2m = (5.3 \times 10^{-25})^2 / (2 \times 9.11 \times 10^{-31}) = 1.5 \times 10^{-19}$ J।

इलेक्ट्रॉन वोल्ट में $K = 1.5 \times 10^{-19} / 1.602 \times 10^{-19} \approx$ **0.95 eV**, यानी 1 eV की कोटि का।

यह परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जाओं, जो कुछ eV होती हैं, से मेल खाता है। अतः केवल सीमित होने से ही इलेक्ट्रॉन को गतिज ऊर्जा मिल जाती है और वह विराम में नहीं रह सकता।

प्रश्न 2(d) 5 अंक · शब्द-सीमा ≈ 150–170 शब्द

मुक्त कण के लिए श्रोडिंगर समीकरण लिखिए और उसका हल तथा ऊर्जा प्राप्त कीजिए।

मुक्त कण के लिए $V = 0$, इसलिए समय-स्वतंत्र समीकरण है

$\mathbf{-(\hbar^2/2m)\, d^2\psi/dx^2 = E\psi}$, या $d^2\psi/dx^2 + k^2\psi = 0$, जहाँ $k^2 = 2mE/\hbar^2$।

हल: $\psi(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx}$।

- पद e^{ikx} $+x$ दिशा में गतिशील कण और e^{-ikx} $-x$ दिशा में गतिशील कण को दर्शाता है।
- **संवेग:** $p = \hbar k$।
- **ऊर्जा:** $E = \hbar^2k^2/2m = p^2/2m$, जो चिरसम्मत व्यंजक है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

- k कोई भी वास्तविक मान ले सकता है, इसलिए ऊर्जा **सतत** है, क्वांटित नहीं।
- समतल तरंग में $|\psi|^2$ सर्वत्र नियत रहता है, इसलिए उसे पूरे आकाश में सामान्यीकृत नहीं किया जा सकता; वास्तविक कण के लिए तरंग-संहति प्रयुक्त होती है।

प्रश्न 2(e) 5 अंक · शब्द-सीमा ≈ 150–170 शब्द

0.2 nm चौड़ाई के एक-विमीय अनंत बॉक्स में इलेक्ट्रॉन के निम्नतम तीन ऊर्जा-स्तर ज्ञात कीजिए।

सूत्र: $E_n = n^2h^2/(8mL^2) = n^2E_1$।

दिया है: $L = 0.2\ \text{nm} = 2 \times 10^{-10}\ \text{m}$, $m = 9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$, $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J s}$।

मूल अवस्था: $E_1 = (6.626 \times 10^{-34})^2 / (8 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (2 \times 10^{-10})^2) = 1.506 \times 10^{-18}\ \text{J} =$ **9.4 eV**।

उच्च स्तर:

- $E_2 = 4E_1 =$ **37.6 eV**
- $E_3 = 9E_1 =$ **84.6 eV**

स्तर 1 : 4 : 9 के अनुपात में हैं और n बढ़ने पर एक-दूसरे से दूर होते जाते हैं। छोटा बॉक्स अधिक ऊर्जाएँ देता है, क्योंकि $E_n \propto 1/L^2$।

खण्ड – ब · दीर्घ उत्तर

प्रश्न 3 · इकाई 1 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

चिरसम्मत भौतिकी कृष्णिका विकिरण की व्याख्या में क्यों विफल रही? प्लांक का विकिरण नियम व्युत्पन्न कीजिए और दिखाइए कि उचित सीमाओं में वह रेले-जीन्स नियम और वीन नियम में बदल जाता है।

भूमिका

कृष्णिका अपने ऊपर पड़ने वाले सारे विकिरण को अवशोषित कर लेती है और गर्म होने पर सतत वर्णक्रम उत्सर्जित करती है जो केवल उसके ताप पर निर्भर है। 1900 तक मापा गया वर्णक्रम सुज्ञात था, पर कोई चिरसम्मत सिद्धांत उसका पूरा आकार नहीं समझा सका। समस्या मैक्स प्लांक ने हल की, जिनके ऊर्जा-क्वांटा के विचार से क्वांटम यांत्रिकी शुरू हुई।

चिरसम्मत सिद्धांत की विफलता

- **वीन नियम (1896)** छोटी तरंगदैर्घ्यों पर आँकड़ों से मेल खाता था पर बड़ी तरंगदैर्घ्यों पर विफल रहा।
- **रेले-जीन्स नियम** गुहा के विकिरण को अप्रगामी तरंगों की तरह मानता है और प्रत्येक विधा को औसत ऊर्जा kT देता है (ऊर्जा का समविभाजन)। ऊर्जा घनत्व है

$$u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3$$।

यह कम आवृत्तियों पर प्रयोग से मेल खाता है, पर और ऊँची आवृत्ति पर यह ν^2 की तरह बढ़ता जाता है, इसलिए कुल ऊर्जा $\int u\, d\nu$ अनंत हो जाती है। इस बेतुके परिणाम को **पराबैंगनी विपदा** कहते हैं।

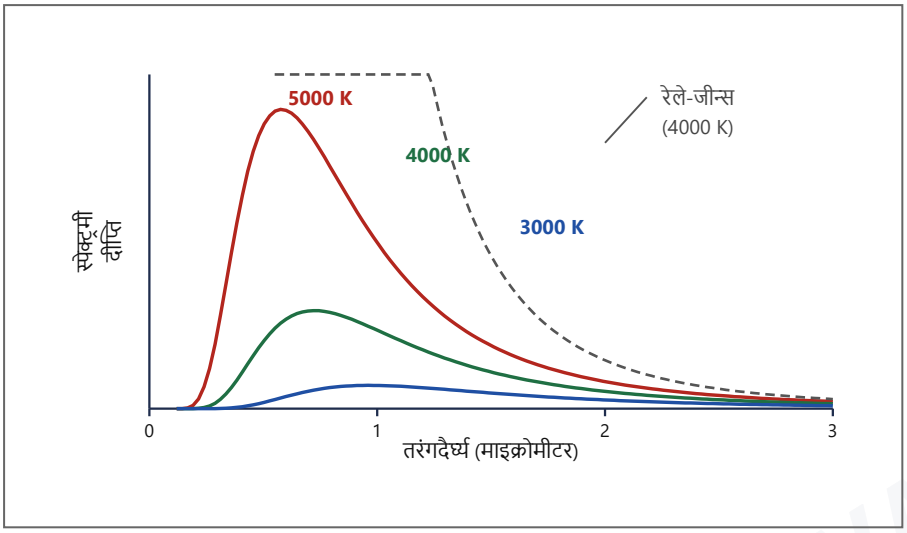
प्लांक की परिकल्पना

1. दीवार के विकिरण करने वाले परमाणु आवृत्ति ν के दोलित्र की तरह कार्य करते हैं।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

2. दोलित्र की ऊर्जा कोई भी नहीं हो सकती, केवल $\mathbf{E_n = nhv}$, n = 0, 1, 2 … हो सकती है।

3. वह ऊर्जा केवल hv आकार के पूरे क्वांटा में उत्सर्जित या अवशोषित करता है।



तीन तापों पर कृष्णिका वर्णक्रम; चिरसम्मत रेले-जीन्स वक्र छोटी तरंगदैर्घ्य पर अपसरित होता है

प्लांक नियम की व्युत्पत्ति

चरण 1: विधाओं की संख्या। आवृत्ति ν से ν + dν के परास में प्रति इकाई आयतन अग्रगामी तरंग विधाओं की संख्या, दो ध्रुवण गिनकर, है

$$\mathbf{N(\nu)d\nu = 8\pi\nu^2\, d\nu / c^3}.$$

चरण 2: दोलित्र की औसत ऊर्जा। ताप T पर दोलित्र की ऊर्जा nhν होने की प्रायिकता बोल्ट्ज़मान गुणक से मिलती है, $P(n) \propto e^{-nh\nu/kT}$। मान लीजिए $x = h\nu/kT$। तब

$$\bar{E} = \Sigma\, nh\nu\, e^{-nx} / \Sigma\, e^{-nx}.$$

हर एक गुणोत्तर श्रेणी है: $\Sigma\, e^{-nx} = 1/(1 - e^{-x})$। अंश इस श्रेणी का $-h\nu\, d/dx$ है, जो $h\nu\, e^{-x}/(1 - e^{-x})^2$ देता है। भाग देने पर,

$$\mathbf{\bar{E} = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1)}.$$

चरण 3: ऊर्जा घनत्व। u(ν)dν = (प्रति आयतन विधाएँ) × (प्रति विधा औसत ऊर्जा), अतः

$$\mathbf{u(\nu)\, d\nu = (8\pi h\nu^3/c^3) \cdot d\nu / (e^{h\nu/kT} - 1)}.$$

यही **प्लांक का विकिरण नियम** है।

सीमांत स्थितियाँ

- **कम आवृत्ति ($h\nu \ll kT$):** $e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT$, अतः $\bar{E} \approx kT$ और $u(\nu) = 8\pi\nu^2 kT/c^3$, यानी **रेले-जीन्स नियम**।
- **उच्च आवृत्ति ($h\nu \gg kT$):** हर का चरघातांकी पद बड़ा होता है, इसलिए $u(\nu) \approx (8\pi h\nu^3/c^3)\, e^{-h\nu/kT}$, जो **वीन नियम** है। चरघातांकी गुणक उच्च-आवृत्ति विधाओं को काट देता है और पराबैंगनी विपदा मिटा देता है।

नियम से अन्य परिणाम

- **वीन का विस्थापन नियम:** $du/d\lambda = 0$ रखने पर $\mathbf{\lambda_{max}\, T = 2.898 \times 10^{-3}\ m\ K}$ मिलता है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

- **स्टीफन-बोल्ट्ज़मान नियम:** सभी आवृत्तियों पर समाकलन करने से कुल ऊर्जा घनत्व T^4 के अनुक्रमानुपाती मिलता है।
- **उदाहरण:** सूर्य की सतह $T \approx 5800$ K के लिए $\lambda_{max} = 2.898 \times 10^{-3} / 5800 = 5.0 \times 10^{-7}$ m = 500 nm, जो दृश्य हरे क्षेत्र में है और प्रेक्षण से मेल खाता है।

महत्व

प्लांक नियतांक $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s पहली बार सामने आया। असतत ऊर्जा का विचार बाद में आइंस्टीन ने प्रकाश-विद्युत प्रभाव (1905) और बोर ने परमाणु (1913) के लिए प्रयोग किया।

निष्कर्ष

चिरसम्मत सिद्धांत इसलिए विफल हुआ क्योंकि उसने हर विधा को ऊर्जा kT लेने दी। प्लांक की मान्यता कि ऊर्जा क्वांटा $h\nu$ में आदान-प्रदान होती है, उच्च-आवृत्ति विधाओं को कम उत्तेजित करती है, सभी तरंगदैर्घ्यों पर प्रयोग से मेल खाता वर्णक्रम देती है, और क्वांटम सिद्धांत के जन्म को चिह्नित करती है।

प्रश्न 3 (अथवा) · इकाई 1

10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

तरंग-कण द्वैत पर निम्नलिखित समस्याएँ हल कीजिए: (क) 150 V से त्वरित इलेक्ट्रॉन की डी-ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य; (ख) क्रिकेट गेंद की तरंगदैर्घ्य; (ग) 0.5 Å के X-किरणों के 60° पर प्रकीर्णन के लिए कॉम्पटन विस्थापन और प्रतिक्षेप ऊर्जा; (घ) 300 K पर ऊष्मीय न्यूट्रॉनों की तरंगदैर्घ्य।

भूमिका

तरंग-कण द्वैत की संख्यात्मक समस्याओं में तीन मुख्य संबंध प्रयुक्त होते हैं: डी-ब्रॉग्ली संबंध $\lambda = h/p$, आइंस्टीन-प्लांक संबंध $E = h\nu$ और कॉम्पटन सूत्र। साफ़ विधि से पूरे अंक मिलते हैं: सूत्र लिखें, दिया हुआ आँकड़ा मात्रकों सहित लिखें, मान रखें, और परिणाम पर टिप्पणी करें।

प्रयुक्त नियतांक: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s, m (इलेक्ट्रॉन) $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg, 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J, $hc = 12400$ eV Å, $k = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K, न्यूट्रॉन का द्रव्यमान $= 1.675 \times 10^{-27}$ kg।

समस्या (क): 150 V से त्वरित इलेक्ट्रॉन

सूत्र: प्राप्त गतिज ऊर्जा $eV = p^2/2m$ है, अतः $p = \sqrt{(2meV)}$ और

$\lambda = h/\sqrt{(2meV)}$।

इलेक्ट्रॉन के लिए यह सरल होकर **λ (Å में) $= 12.27/\sqrt{V}$** हो जाता है।

गणना: $\lambda = 12.27/\sqrt{150} = 12.27/12.25 =$ **1.00 Å** (लगभग 1.0×10^{-10} m)।

टिप्पणी: यह क्रिस्टल में परमाणुओं के बीच की दूरी की कोटि का है, इसलिए ऐसे इलेक्ट्रॉन क्रिस्टलों से विवर्तित होते हैं। यही डेविसन-जर्मर प्रयोग और इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी का सिद्धांत है।

समस्या (ख): क्रिकेट गेंद

आँकड़ा: द्रव्यमान $m = 0.2$ kg और चाल $v = 10$ m/s लीजिए।

सूत्र: $\lambda = h/mv$।

गणना: $\lambda = 6.626 \times 10^{-34} / (0.2 \times 10) =$ **3.3×10^{-34} m**।

टिप्पणी: तरंगदैर्घ्य नाभिक के आकार (10^{-15} m) से लगभग 10^{19} गुना छोटी है। कोई उपकरण ऐसी तरंग नहीं पहचान सकता, इसलिए रोज़मर्रा की वस्तुओं में तरंग व्यवहार नहीं दिखता। तरंग प्रकृति केवल इलेक्ट्रॉन और

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

न्यूट्रॉन जैसे बहुत कम द्रव्यमान के कणों में दिखती है।

समस्या (ग): कॉम्पटन प्रकीर्णन

आँकड़ा: आपतित तरंगदैर्घ्य $\lambda = 0.5$ Å, प्रकीर्णन कोण $\theta = 60°$।

कॉम्पटन विस्थापन: $\Delta\lambda = (h/m_0c)(1 - \cos\theta)$, जहाँ $h/m_0c = 0.02426$ Å इलेक्ट्रॉन की कॉम्पटन तरंगदैर्घ्य है।

गणना: $\Delta\lambda = 0.02426 \times (1 - \cos 60°) = 0.02426 \times 0.5 =$ **0.0121 Å**।

प्रकीर्णित तरंगदैर्घ्य: $\lambda' = 0.5 + 0.0121 =$ **0.5121 Å**।

प्रतिक्षेपित इलेक्ट्रॉन को दी गई ऊर्जा: यह फोटॉन की ऊर्जा की हानि के बराबर है,

$K = hc(1/\lambda - 1/\lambda') = 12400 \times (1/0.5 - 1/0.5121) = 24800 - 24213 \approx$ **587 eV**।

टिप्पणी: विस्थापन आपतित तरंगदैर्घ्य से स्वतंत्र है और केवल कोण पर निर्भर करता है। इसका अधिकतम मान $2h/m_0c = 0.0485$ Å है, $\theta = 180°$ पर। यहाँ फोटॉन की लगभग 2.4% ऊर्जा ही इलेक्ट्रॉन को जाती है, क्योंकि λ कॉम्पटन तरंगदैर्घ्य की तुलना में बड़ी है।

समस्या (घ): 300 K पर ऊष्मीय न्यूट्रॉन

सूत्र: ऊष्मीय साम्य में कण की औसत गतिज ऊर्जा $E = (3/2)\,kT$ है, और $\lambda = h/\sqrt{(2mE)}$।

ऊर्जा की गणना: $E = 1.5 \times 1.381 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21}$ J = **0.0388 eV**।

तरंगदैर्घ्य: $\lambda = 6.626 \times 10^{-34} / \sqrt{(2 \times 1.675 \times 10^{-27} \times 6.21 \times 10^{-21})}$

$= 6.626 \times 10^{-34} / 4.56 \times 10^{-24} = 1.45 \times 10^{-10}$ m = **1.45 Å**।

टिप्पणी: ऊष्मीय न्यूट्रॉन की तरंगदैर्घ्य परमाणुओं के बीच की दूरी के निकट होती है, इसलिए न्यूट्रॉन विवर्तन का प्रयोग क्रिस्टल संरचनाओं और ठोसों में चुंबकीय क्रम के अध्ययन में होता है।

सारांश तालिका

समस्या	राशि	उत्तर
(क)	150 V इलेक्ट्रॉन की λ	1.00 Å
(ख)	क्रिकेट गेंद की λ	3.3×10^{-34} m
(ग)	कॉम्पटन विस्थापन; प्रतिक्षेप ऊर्जा	0.0121 Å; 587 eV
(घ)	ऊष्मीय न्यूट्रॉन की λ	1.45 Å

निष्कर्ष

ये परिणाम बताते हैं कि तरंग व्यवहार कब महत्वपूर्ण है: केवल तब जब डी-ब्रॉग्ली तरंगदैर्घ्य उस संरचना के आकार के तुलनीय हो जिससे कण अन्योन्यक्रिया करता है। इलेक्ट्रॉनों और न्यूट्रॉनों के लिए यह परमाणवीय आकार की है, और बड़ी वस्तुओं के लिए देखने के लिए बहुत छोटी।

प्रश्न 4 · इकाई 2 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

अनिश्चितता सिद्धांत पर निम्नलिखित समस्याएँ हल कीजिए: (क) 5×10^3 m/s से गतिशील इलेक्ट्रॉन की चाल 0.003% तक ज्ञात होने पर उसकी स्थिति की न्यूनतम अनिश्चितता; (ख) 10^{-8} s जीवनकाल वाली

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

अवस्था से निकली वर्णक्रम रेखा की चौड़ाई; (ग) 10 g की गोली की स्थिति की अनिश्चितता; (घ) यदि नाभिकीय बल का परास 1.4 fm हो तो विनिमित कण का द्रव्यमान।

भूमिका

हाइज़ेनबर्ग का अनिश्चितता सिद्धांत कहता है कि किसी कण की स्थिति और संवेग दोनों एक साथ ठीक-ठीक ज्ञात नहीं हो सकते, और ऊर्जा तथा समय भी इसी प्रकार जुड़े हैं:

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ और **$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$**, जहाँ $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}$ J s।

परिमाण-कोटि की समस्याओं में संबंध प्रायः $\hbar/2$ की जगह $\hbar$ से लिखे जाते हैं, और प्रश्न में प्रायः बताया होता है कि कौन-सा रूप लेना है। यहाँ भाग (घ) को, जो आकलन है, छोड़कर सटीक न्यूनतम रूप $\hbar/2$ लिया गया है।

नियतांक: $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J s, m (इलेक्ट्रॉन) $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg, 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J, $\hbar c = 197.3$ MeV fm।

समस्या (क): चाल 0.003% तक ज्ञात इलेक्ट्रॉन

आँकड़ा: $v = 5 \times 10^3$ m/s, चाल की अनिश्चितता = 0.003% = v का 3×10^{-5}।

संवेग: $p = mv = 9.11 \times 10^{-31} \times 5 \times 10^3 = 4.555 \times 10^{-27}$ kg m/s।

संवेग की अनिश्चितता: $\Delta p = 3 \times 10^{-5} \times 4.555 \times 10^{-27} = 1.37 \times 10^{-31}$ kg m/s।

स्थिति की न्यूनतम अनिश्चितता:

$\Delta x \geq \hbar/(2\Delta p) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 1.37 \times 10^{-31}) =$ **3.9×10^{-4} m ≈ 0.39 mm।**

टिप्पणी: इलेक्ट्रॉन की स्थिति लगभग 0.4 mm अनिश्चित है, जो परमाणवीय पैमाने (10^{-10} m) पर बहुत बड़ी है। संवेग का सटीक ज्ञान होने पर स्थिति बहुत अस्पष्ट हो जाती है।

समस्या (ख): वर्णक्रम रेखा की चौड़ाई

आँकड़ा: उत्तेजित अवस्था का जीवनकाल $\Delta t = 10^{-8}$ s।

ऊर्जा की अनिश्चितता: $\Delta E \geq \hbar/(2\Delta t) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-8}) = 5.27 \times 10^{-27}$ J $= 5.27 \times 10^{-27} / 1.602 \times 10^{-19} =$ **3.3×10^{-8} eV।**

आवृत्ति चौड़ाई: $\Delta\nu = \Delta E/h = 1/(4\pi\Delta t) = 1 / (4\pi \times 10^{-8}) =$ **8.0×10^6 Hz ≈ 8 MHz।**

टिप्पणी: उत्तेजित स्तर ऊर्जा में थोड़ा 'धुँधला' होता है, इसलिए उत्सर्जित रेखा की प्राकृतिक चौड़ाई लगभग 8 MHz होती है, जो लगभग 10^{15} Hz की प्रकाशीय आवृत्ति की तुलना में बहुत छोटी है। अधिक जीवनकाल वाली अवस्था तीखी रेखा देती है, और मूल अवस्था, जिसका जीवनकाल अनंत है, की ऊर्जा बिल्कुल निश्चित होती है।

समस्या (ग): एक गोली

आँकड़ा: $m = 10$ g $= 0.01$ kg, मान लें चाल $\Delta v = 10^{-6}$ m/s तक ज्ञात है, जो अत्यंत सटीक माप है।

Δp: $m\Delta v = 0.01 \times 10^{-6} = 10^{-8}$ kg m/s।

Δx: $\hbar/(2\Delta p) = 1.055 \times 10^{-34} / (2 \times 10^{-8}) =$ **5.3×10^{-27} m।**

टिप्पणी: यह प्रोटॉन से लगभग 10^{11} गुना छोटी है। यह किसी भी संभव माप से बहुत नीचे है, इसलिए स्थूल वस्तुओं के लिए अनिश्चितता सिद्धांत का कोई व्यावहारिक प्रभाव नहीं है और चिरसम्मत भौतिकी काम करती है। यह संगति सिद्धांत का उदाहरण है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

समस्या (घ): नाभिकीय बल का परास

विचार (युकावा): न्यूक्लियॉनों के बीच नाभिकीय बल एक विनिमित कण वहन करता है। विराम ऊर्जा mc^2 वाला कण निर्वात से $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$ समय के लिए 'उधार' लिया जा सकता है, जहाँ $\Delta E = mc^2$। उस समय में वह अधिकतम $R \approx c\Delta t$ दूरी तय कर सकता है।

आकलन: $R \approx c\hbar/(mc^2)$, अतः **$mc^2 \approx \hbar c/R$।**

$R = 1.4$ fm लेने पर: $mc^2 \approx 197.3$ MeV fm / 1.4 fm ≈ **141 MeV**, यानी इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान का **लगभग 275 गुना।**

टिप्पणी: यह पायॉन के प्रेक्षित द्रव्यमान 139.6 MeV/c^2 के निकट है, जिसकी खोज 1947 में हुई। यह पूर्वानुमान ऊर्जा-समय अनिश्चितता संबंध का प्रसिद्ध उदाहरण है।

सारांश तालिका

भाग	परिणाम
(क)	$\Delta x \geq 3.9 \times 10^{-4}$ m
(ख)	$\Delta E \geq 3.3 \times 10^{-8}$ eV; $\Delta\nu \approx 8$ MHz
(ग)	$\Delta x \geq 5.3 \times 10^{-27}$ m
(घ)	$mc^2 \approx 141$ MeV

निष्कर्ष

अनिश्चितता सिद्धांत प्रकृति की मूल विशेषता है, उपकरणों का दोष नहीं। यह इलेक्ट्रॉनों और नाभिकों के लिए महत्वपूर्ण है, जहाँ संख्याएँ सार्थक हैं, और रोज़मर्रा की वस्तुओं के लिए अनुभव-योग्य नहीं।

प्रश्न 4 (अथवा) · इकाई 2

10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

दो हर्मिटीय संकारकों के लिए व्यापक अनिश्चितता संबंध $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle|$ व्युत्पन्न कीजिए। इससे $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ प्राप्त कीजिए और समझाइए कि दो प्रेक्ष्य राशियाँ कब एक साथ ठीक-ठीक मापी जा सकती हैं।

भूमिका

अनिश्चितता सिद्धांत को गामा-किरण सूक्ष्मदर्शी जैसे विचार-प्रयोगों से समझाया जा सकता है, पर इसका सटीक गणितीय रूप क्वांटम यांत्रिकी की संरचना से आता है। यह दिखाता है कि अनिश्चितता किसी भद्दे माप से नहीं होती: वह इसलिए उठती है कि दोनों राशियों के संकारक **क्रमविनिमेय नहीं** हैं।

संकेतन और परिभाषाएँ

- A और B दो प्रेक्ष्य राशियों को दर्शाने वाले हर्मिटीय संकारक हैं, और ψ एक सामान्यीकृत अवस्था है।
- **प्रत्याशा मान** $\langle A\rangle = \int \psi^* A \psi\, dx$ है।
- **विचलन संकारक** परिभाषित कीजिए: **$\delta A = A - \langle A\rangle$**। **अनिश्चितता (मानक विचलन)** है

$(\Delta A)^2 = \langle(\delta A)^2\rangle = \int \psi^* (\delta A)^2 \psi\, dx$।

- **क्रमविनिमेयक** $[A, B] = AB - BA$ है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

व्युत्पत्ति

चरण 1: दो नए फलन। मान लीजिए $f = \delta A\,\psi$ और $g = \delta B\,\psi$। चूँकि δA हर्मिटीय है,

$\langle f|f\rangle = \int (\delta A\psi)^*(\delta A\psi)\,dx = \langle(\delta A)^2\rangle = (\Delta A)^2$, और इसी प्रकार $\langle g|g\rangle = (\Delta B)^2$।

चरण 2: श्वार्ज़ असमिका। किन्हीं दो फलनों के लिए $\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$। अतः

$$\boldsymbol{(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2 = |\langle \delta A\,\delta B\rangle|^2}\text{।}$$

चरण 3: गुणनफल को बाँटना। संकारकों के किसी गुणनफल को उसके प्रतिक्रमविनिमेयक के आधे और क्रमविनिमेयक के आधे के योग के रूप में लिखा जा सकता है:

$\delta A\,\delta B = \tfrac{1}{2}(\delta A\,\delta B + \delta B\,\delta A) + \tfrac{1}{2}(\delta A\,\delta B - \delta B\,\delta A)$।

चूँकि δA और δB, A और B से केवल संख्याओं से भिन्न हैं, $[\delta A, \delta B] = [A, B]$। अतः

$\langle \delta A\,\delta B\rangle = \tfrac{1}{2}\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle + \tfrac{1}{2}\langle[A, B]\rangle$।

चरण 4: वास्तविक और काल्पनिक भाग। दो हर्मिटीय संकारकों के प्रतिक्रमविनिमेयक का प्रत्याशा मान **वास्तविक** होता है। दो हर्मिटीय संकारकों का क्रमविनिमेयक $[A, B]$ प्रति-हर्मिटीय होता है, इसलिए उसका प्रत्याशा मान **विशुद्ध काल्पनिक** होता है। सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के लिए $|z|^2 = a^2 + b^2$, इसलिए

वर्ग करने पर: $|\langle \delta A\,\delta B\rangle|^2 = \tfrac{1}{4}\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle^2 + \tfrac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 \geq \tfrac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$।

चरण 5: परिणाम। चरण 2 और 4 को मिलाकर और वर्गमूल लेकर,

$$\boldsymbol{\Delta A\cdot\Delta B \geq \tfrac{1}{2}\,|\langle[A, B]\rangle|}\text{।}$$

यह रॉबर्टसन का व्यापक अनिश्चितता संबंध है।

स्थिति और संवेग पर अनुप्रयोग

$A = x$ और $B = p = -i\hbar\,d/dx$ लीजिए। किसी भी फलन ψ के लिए,

$[x, p]\psi = x(-i\hbar\,\psi') - (-i\hbar)(x\psi)' = -i\hbar\,x\psi' + i\hbar(\psi + x\psi') = \boldsymbol{i\hbar\,\psi}$।

अतः $[x, p] = i\hbar$, जो एक नियतांक है, और $\langle[x, p]\rangle = i\hbar$। प्रतिस्थापित करने पर,

$\Delta A\,\Delta B \geq \tfrac{1}{2}\,|i\hbar|$, यानी $\boldsymbol{\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar/2}$।

दायाँ पक्ष अवस्था पर निर्भर नहीं करता, इसीलिए संबंध सार्वत्रिक है।

अन्य उदाहरण

युग्म	क्रमविनिमेयक	परिणाम
x और p_x	$i\hbar$	$\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$
L_x और L_y	$i\hbar\,L_z$	$\Delta L_x\,\Delta L_y \geq (\hbar/2)\times\lvert\langle L_z\rangle\rvert$
x और p_y	0	कोई निचली सीमा नहीं
ऊर्जा H और समय	(समय एक प्राचल है, संकारक नहीं)	$\Delta E\,\Delta t \gtrsim \hbar/2$ अलग विधि से निकलता है

संगत और असंगत प्रेक्ष्य राशियाँ

- यदि **$[A, B] = 0$**, तो संकारकों के उभयनिष्ठ आइगेन-फलन होते हैं और दोनों राशियों के मान एक साथ ठीक-ठीक हो सकते हैं। वे **संगत** हैं, जैसे x और p_y, या स्थिति के घटक, या केंद्रीय विभव में H और L^2।
- यदि **$[A, B] \neq 0$**, तो सामान्यतः उभयनिष्ठ आइगेन-फलन नहीं होते और राशियाँ **असंगत** हैं: एक को तीखा करने से दूसरी अनिश्चित हो जाती है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

भौतिक अर्थ

अनिश्चितता **अवस्था** की होती है, उपकरण की नहीं। पूर्ण उपकरण भी ऐसी अवस्था नहीं दे सकता जिसमें x और p दोनों का प्रसार शून्य हो। यह समझाता है कि परमाणु में इलेक्ट्रॉन नाभिक पर विराम में क्यों नहीं बैठ सकता, और परमाणुओं की न्यूनतम ऊर्जा क्यों होती है।

निष्कर्ष

श्वार्ज़ असमिका और क्रमविनिमेयक का उपयोग करके हमें व्यापक अनिश्चितता संबंध मिलता है जो किन्हीं भी दो प्रेक्ष्य राशियों को जोड़ता है। x और p पर लगाने से यह हाइज़ेनबर्ग का संबंध ठीक-ठीक देता है, और दिखाता है कि क्वांटम अनिश्चितता की जड़ संकारकों का क्रमविनिमेय न होना है।

प्रश्न 5 • इकाई 3 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

तरंग-फलन का सामान्यीकरण क्यों आवश्यक है? (क) $0 \le x \le L$ के लिए $\psi = A\,x(L-x)$, (ख) $\psi = A\,e^{-a|x|}$ और (ग) $\psi = A\,e^{-x^2/2\sigma^2}$ को सामान्यीकृत कीजिए, और प्रत्येक के लिए $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ तथा Δx ज्ञात कीजिए।

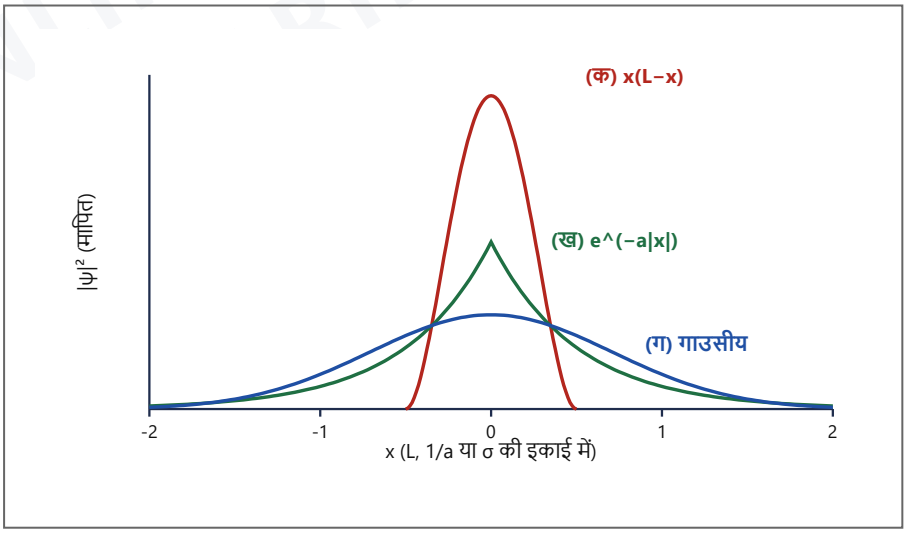
भूमिका

बॉर्न की व्याख्या के अनुसार $|\psi(x)|^2\,dx$ कण के x और x + dx के बीच पाए जाने की प्रायिकता है। कण कहीं तो मिलना ही चाहिए, इसलिए कुल प्रायिकता 1 होनी चाहिए। यही **सामान्यीकरण प्रतिबंध** है:

$\int |\psi|^2\,dx = 1$ (उस पूरे आकाश पर जहाँ $\psi \neq 0$)।

यदि श्रोडिंगर समीकरण का कोई हल ψ इसे पूरा नहीं करता, तो हम उसे प्रतिबंध से मिले नियतांक A से गुणा करते हैं। समीकरण रैखिक है, इसलिए Aψ भी हल है। जिस फलन में $|\psi|^2$ का समाकल अनंत हो, उसे सामान्यीकृत नहीं किया जा सकता और वह एकल कण का वर्णन नहीं कर सकता।

साथ ही, किसी राशि का **प्रत्याशा मान** $\langle x\rangle = \int x\,|\psi|^2\,dx$ है और अनिश्चितता $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ है।



तीन सामान्यीकृत तरंग-फलनों (क), (ख) और (ग) के प्रायिकता घनत्व

समस्या (क): $\psi = A\,x(L-x)$, $0 \le x \le L$ (बाहर शून्य)

सामान्यीकरण: $A^2 \int_0^L x^2(L-x)^2\,dx = 1$।

फैलाने पर $x^2(L-x)^2 = L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4$, और समाकलन देता है $L^2\cdot L^3/3 - 2L\cdot L^4/4 + L^5/5 = L^5(1/3 - 1/2 + 1/5) = \mathbf{L^5/30}$।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

अतः $A^2 L^5/30 = 1$, इसलिए **$A = \sqrt{(30/L^5)}$ I**

⟨x⟩: $|\psi|^2$ x = L/2 के सापेक्ष सममित है, अतः **⟨x⟩ = L/2 I**

$\langle x^2 \rangle$: $(30/L^5) \int_0^L x^4(L - x)^2 \, dx = (30/L^5) \times L^7 [1/5 - 2/6 + 1/7] = 30L^2 \times (1/105) =$ **$2L^2/7$ I**

Δx: $\Delta x^2 = 2L^2/7 - L^2/4 = L^2/28$, अतः **$\Delta x = L/\sqrt{28} \approx 0.19\ L$ I**

प्रायिकता बाएँ आधे भाग, 0 से L/2, में: सममिति से यह **1/2** है।

समस्या (ख): $\psi = A\, e^{-a|x|}$, $a > 0$

यहाँ $|\psi|^2 = A^2\, e^{-2a|x|}$ x में सम है, इसलिए 0 से ∞ तक समाकलन कर दोगुना कीजिए।

सामान्यीकरण: $2A^2 \int_0^\infty e^{-2ax} \, dx = 2A^2 \times 1/(2a) = A^2/a = 1$, अतः **$A = \sqrt{a}$ I**

⟨x⟩: समाकल्य $x|\psi|^2$ विषम है, अतः **⟨x⟩ = 0 I**

$\langle x^2 \rangle$: $2a \int_0^\infty x^2\, e^{-2ax} \, dx = 2a \times 2!/(2a)^3 =$ **$1/(2a^2)$ I**

Δx: $\Delta x = 1/(\sqrt{2}\, a) \approx 0.71/a$ I

प्रायिकता कि कण $|x| < 1/a$ में मिले: $2a \int_0^{1/a} e^{-2ax} \, dx = 1 - e^{-2} =$ **0.865 I**

ध्यान दें कि ψ में x = 0 पर शीर्ष (कस्प) है, इसलिए वहाँ dψ/dx सतत नहीं है। यह तभी स्वीकार्य है जब उस बिंदु पर विभव अनंत हो, जैसे डेल्टा-फलन विभव।

समस्या (ग): $\psi = A\, e^{-x^2/2\sigma^2}$, $-\infty < x < \infty$

सामान्यीकरण: $A^2 \int e^{-x^2/\sigma^2} \, dx = A^2\, \sigma\sqrt{\pi} = 1$, जहाँ $\int e^{-x^2/\sigma^2} \, dx = \sigma\sqrt{\pi}$ I. अतः **$A = (\pi\sigma^2)^{-1/4}$ I**

⟨x⟩ = 0 क्योंकि समाकल्य विषम है।

$\langle x^2 \rangle$: $A^2 \int x^2\, e^{-x^2/\sigma^2} \, dx = A^2 \times (\sigma^3\sqrt{\pi})/2 =$ **$\sigma^2/2$ I**

Δx = $\sigma/\sqrt{2} \approx 0.71\sigma$ I

इस गाउसीय फलन के लिए संवेग अनिश्चितता $\Delta p = \hbar/(\sqrt{2}\sigma)$ है, इसलिए **$\Delta x\, \Delta p = \hbar/2$**, जो अनुमत न्यूनतम है। गाउसीय फलन न्यूनतम-अनिश्चितता तरंग-संहति है।

सारांश तालिका

फलन	A	⟨x⟩	$\langle x^2 \rangle$	Δx
(क) A x(L − x)	$\sqrt{(30/L^5)}$	L/2	$2L^2/7$	$L/\sqrt{28}$
(ख) A exp(−a × abs x)	$\sqrt{a}$	0	$1/(2a^2)$	$1/(\sqrt{2}\, a)$
(ग) A $e^{-x^2/2\sigma^2}$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}$	0	$\sigma^2/2$	$\sigma/\sqrt{2}$

उत्तरों की जाँच

- A का मात्रक $1/\sqrt{\text{लंबाई}}$ है, ताकि A^2·(लंबाई) विमाहीन हो।
- Δx धनात्मक संख्या आती है, और (क) में वह बॉक्स की चौड़ाई L से छोटी है, जैसा होना चाहिए।
- (क) और (ख) में ψ परिमित, एकमानी और सतत है, इसलिए वे स्वीकार्य तरंग-फलन हैं।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

निष्कर्ष

सामान्यीकरण श्रोडिंगर समीकरण के हल को प्रायिकता आयाम में बदल देता है। ψ के सामान्यीकृत होने पर प्रत्याशा मान और अनिश्चितताएँ ऊपर दिखाए अनुसार सरल समाकलन से मिल जाती हैं।

प्रश्न 5 (अथवा) · इकाई 3 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

किसी संकारक के प्रत्याशा मान की गति-समीकरण d⟨A⟩/dt = (i/ħ)⟨[H, A]⟩ व्युत्पन्न कीजिए। इससे एहरेनफेस्ट प्रमेय सिद्ध कीजिए और चिरसम्मत यांत्रिकी से उसके संबंध की चर्चा कीजिए।

भूमिका

किसी प्रेक्ष्य राशि का प्रत्याशा मान ⟨A⟩ अवस्था ψ में रखे समान निकायों पर कई मापों का औसत है। चिरसम्मत यांत्रिकी में कण निश्चित पथ पर चलता है जो न्यूटन के नियमों का पालन करता है। पॉल एहरेनफेस्ट ने 1927 में दिखाया कि क्वांटम राशियों के **औसत** ऐसे समीकरणों का पालन करते हैं जो न्यूटन के नियमों से बहुत मिलते हैं। यह समझाता है कि क्वांटम यांत्रिकी से चिरसम्मत जगत कैसे उभरता है।

चरण 1: प्रत्याशा मान का समय-अवकलज

मान लीजिए A ऐसा संकारक है जो स्पष्टतः समय पर निर्भर नहीं है, और ψ(x, t) इस समीकरण का सामान्यीकृत हल है

iħ ∂ψ/∂t = Hψ।

सम्मिश्र संयुग्मी लेने और H के हर्मिटीय होने का उपयोग करने पर:

∂ψ/∂t = −(i/ħ) Hψ और ∂ψ*/∂t = +(i/ħ) (Hψ)*।

अब ⟨A⟩ = ∫ψ* A ψ dx, इसलिए

d⟨A⟩/dt = ∫ (∂ψ*/∂t) Aψ dx + ∫ ψ* A (∂ψ/∂t) dx

= (i/ħ) ∫ (Hψ) *Aψ dx* − *(i/ħ)* ∫ *ψ* A Hψ dx।

चूँकि H हर्मिटीय है, ∫ (Hψ) *Aψ dx* = ∫ *ψ* H A ψ dx। अतः

d⟨A⟩/dt = (i/ħ) ∫ ψ* (HA − AH) ψ dx = (i/ħ) ⟨[H, A]⟩।

(यदि A स्पष्टतः समय पर भी निर्भर हो, तो पद ⟨∂A/∂t⟩ जुड़ जाता है।)

निष्कर्ष: यदि A, H के साथ क्रमविनिमेय है, तो ⟨A⟩ समय के साथ नहीं बदलता, इसलिए A एक **संरक्षित राशि** है। A = H के लिए [H, H] = 0, जो ऊर्जा के संरक्षण को व्यक्त करता है।

चरण 2: ⟨x⟩ की गति

H = p^2/2m + V(x) और A = x लीजिए।

- [V, x] = 0, क्योंकि V(x) केवल x का फलन है।
- [p^2, x] = p[p, x] + [p, x]p = p(−iħ) + (−iħ)p = −2iħ p।

अतः [H, x] = (1/2m)(−2iħ p) = −iħ p/m। प्रतिस्थापित करने पर,

d⟨x⟩/dt = (i/ħ)(−iħ ⟨p⟩/m) = **⟨p⟩/m।**

यह **वेग = संवेग / द्रव्यमान** का क्वांटम रूप है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

चरण 3: ⟨p⟩ की गति

A = p = −iℏ d/dx लीजिए।

- $[p^2, p] = 0$।
- $[V, p]\psi = V(-i\hbar\psi') - (-i\hbar)(V\psi)' = i\hbar\, V'\,\psi$, अतः $[V, p] = i\hbar\, dV/dx$।

तब $[H, p] = i\hbar\, dV/dx$ और

$d\langle p\rangle/dt = (i/\hbar)(i\hbar\,\langle dV/dx\rangle) = \mathbf{-\langle dV/dx\rangle}$।

यह **बल = −dV/dx**, यानी न्यूटन के द्वितीय नियम का क्वांटम रूप है।

एहरेनफेस्ट प्रमेय

$d\langle x\rangle/dt = \langle p\rangle/m$ और $d\langle p\rangle/dt = -\langle V'(x)\rangle$।

दोनों को मिलाने पर, $m\, d^2\langle x\rangle/dt^2 = -\langle V'(x)\rangle$।

चिरसम्मत यांत्रिकी से संबंध

न्यूटन का नियम $m\, d^2x/dt^2 = -V'(x)$ होगा, जिसमें बल बिंदु ⟨**x**⟩ पर, यानी $V'(\langle x\rangle)$, आँका जाता है। क्वांटम परिणाम में **बल का औसत** $\langle V'(x)\rangle$ है। ये तभी बराबर हैं जब $\langle V'(x)\rangle = V'(\langle x\rangle)$।

विभव	V′(x)	परिणाम
मुक्त कण V = 0	0	⟨p⟩ नियत, ⟨x⟩ एकसमान गति करता है
एकसमान बल V = −Fx	−F	⟨x⟩ ठीक चिरसम्मत पथ पर चलता है
आवर्ती दोलित्र V = ½kx²	kx	$m\, d^2\langle x\rangle/dt^2 = -k\langle x\rangle$, ठीक चिरसम्मत सरल आवर्त गति
अनावर्ती, जैसे V = x⁴	4x³	$\langle x^3\rangle \neq \langle x\rangle^3$, इसलिए समीकरण न्यूटन से भिन्न हैं

नियत, रैखिक या द्विघात विभवों के लिए माध्य स्थिति ठीक चिरसम्मत पथ पर चलती है। अन्य विभवों में अंतर तरंग-संहति के प्रसार पर निर्भर करता है। जब संहति उस दूरी की तुलना में **संकरी** हो जिस पर बल बदलता है, तब $\langle V'(x)\rangle \approx V'(\langle x\rangle)$ होता है और संहति चिरसम्मत कण की तरह चलती है। स्थूल पिंडों के लिए यह सत्य है, इसीलिए उनके लिए न्यूटनी यांत्रिकी काम करती है। यह **संगति सिद्धांत** का उदाहरण है।

निष्कर्ष

एहरेनफेस्ट प्रमेय दिखाता है कि क्वांटम यांत्रिकी में चिरसम्मत यांत्रिकी एक सीमा के रूप में निहित है। क्वांटम राशियों के औसत न्यूटन-जैसे समीकरणों का पालन करते हैं, और चिरसम्मत वर्णन तभी विफल होता है जब तरंग-संहति ऐसे क्षेत्र में फैली हो जहाँ विभव उल्लेखनीय रूप से बदलता है।

प्रश्न 6 • इकाई 4 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

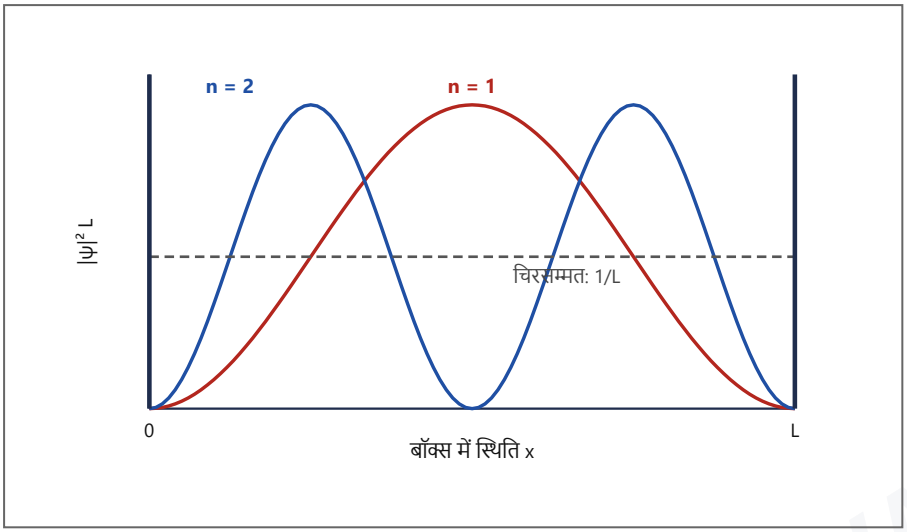
L चौड़ाई के एक-विमीय अनंत बॉक्स में कण के लिए n-वीं अवस्था में ⟨x⟩, ⟨x²⟩, ⟨p⟩, ⟨p²⟩ तथा अनिश्चितताएँ Δx और Δp परिकलित कीजिए। अनिश्चितता सिद्धांत की पुष्टि कीजिए और दिखाइए कि n बड़ा होने पर परिणाम चिरसम्मत परिणाम की ओर जाता है।

भूमिका

बॉक्स में कण के सामान्यीकृत तरंग-फलन $\psi_n(x) = \sqrt{(2/L)}\,\sin(n\pi x/L)$, $0 \le x \le L$, हैं, और ऊर्जाएँ $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$ हैं। तरंग-फलन ज्ञात होने पर प्रत्येक मापनीय गुण प्रत्याशा मान $\langle Q\rangle = \int \psi_n^*\, Q\, \psi_n\, dx$ के रूप

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

में मिलता है। यहाँ हम स्थिति और संवेग का माध्य और प्रसार ज्ञात करते हैं और उन्हें अनिश्चितता सिद्धांत पर परखते हैं।



बॉक्स में प्रायिकता घनत्व n = 1 और n = 2 के लिए, चिरसम्मत समान वितरण 1/L से तुलना सहित

स्थिति

⟨x⟩: $|\psi_n|^2 = (2/L)\sin^2(n\pi x/L)$ बॉक्स के केंद्र के सापेक्ष सममित है, इसलिए

प्रत्येक n के लिए **⟨x⟩ = L/2**।

⟨x^2⟩: $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ का उपयोग कीजिए:

$\langle x^2\rangle = (1/L)\int_0^L x^2\,[1 - \cos(2n\pi x/L)]\,dx = L^2/3 - (1/L)\int_0^L x^2\cos(2n\pi x/L)\,dx$।

खंडशः समाकलन से (x = 0 और x = L पर ज्या वाले पद शून्य हो जाते हैं), $\int_0^L x^2\cos(2n\pi x/L)\,dx = L^3/(2n^2\pi^2)$। अतः

$\langle x^2\rangle = L^2\,(1/3 - 1/(2n^2\pi^2))$।

स्थिति की अनिश्चितता: $\Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = L^2(1/3 - 1/(2n^2\pi^2) - 1/4)$, अतः

$\Delta x = L\sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))}$।

संवेग

⟨p⟩: $p = -i\hbar\, d/dx$ के साथ, $\langle p\rangle = (2/L)(-i\hbar)(n\pi/L)\int_0^L \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\,dx = 0$, क्योंकि पूर्ण अर्ध-तरंगों पर sin·cos का समाकल शून्य है। अतः **⟨p⟩ = 0**। यह अपेक्षित है, क्योंकि अप्रगामी तरंग दो विपरीत दिशाओं में चलती तरंगों का समान अध्यारोपण है।

⟨p^2⟩: $p^2\psi_n = -\hbar^2\, d^2\psi_n/dx^2 = \hbar^2(n\pi/L)^2\,\psi_n$, अतः ψ_n, p^2 का आइगेन-फलन है, और

$\langle p^2\rangle = n^2\pi^2\hbar^2/L^2$।

(यह केवल $2mE_n$ है, क्योंकि बॉक्स के भीतर स्थितिज ऊर्जा शून्य है।)

संवेग की अनिश्चितता: $\Delta p = \sqrt{(\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2)} = \mathbf{n\pi\hbar/L}$।

अनिश्चितता सिद्धांत की पुष्टि

$\Delta x\cdot\Delta p = L\sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))}\times n\pi\hbar/L = \hbar\sqrt{(n^2\pi^2/12 - 1/2)} = (\hbar/2)\sqrt{(n^2\pi^2/3 - 2)}$।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

n	$\sqrt{(n^2\pi^2/3 - 2)}$	$\Delta x \cdot \Delta p$
1	1.136	0.568 ħ
2	3.341	1.670 ħ
3	5.254	2.627 ħ

प्रत्येक स्थिति में $\Delta x \cdot \Delta p$, $\hbar/2 = 0.5\ \hbar$ से अधिक है, इसलिए अनिश्चितता सिद्धांत पूरा होता है। सबसे छोटा गुणनफल $n = 1$ के लिए ($0.568\ \hbar$) है, जो अनुमत न्यूनतम मान के निकट है। n बढ़ने पर Δp, n के अनुपात में बढ़ता है जबकि Δx लगभग नियत हो जाता है, इसलिए गुणनफल बढ़ता है।

बड़े n के लिए चिरसम्मत सीमा

- $n \to \infty$ पर पद $1/(2n^2\pi^2) \to 0$ होता है, अतः $\langle x^2 \rangle \to L^2/3$ और $\Delta x \to L/\sqrt{12} \approx 0.289\ L$। ये उस कण के मान हैं जो बॉक्स में कहीं भी समान संभावना से मिल सकता है, जो दीवारों के बीच टकराते कण का चिरसम्मत परिणाम है।
- $\sin^2(n\pi x/L)$ के तीव्र दोलन औसत हो जाते हैं और क्वांटम घनत्व चिरसम्मत समान घनत्व $1/L$ की ओर जाता है।
- **उदाहरण:** बाएँ चौथाई 0 से $L/4$ में कण मिलने की प्रायिकता $P = 1/4 - \sin(n\pi/2)/(2n\pi)$ है। $n = 1$ के लिए $P = 0.25 - 0.159 =$ **0.091**, जो चिरसम्मत मान 0.25 से बहुत कम है। $n = 2$ के लिए $P =$ **0.25**, चिरसम्मत मान के बराबर। बड़े n के लिए $P \to 0.25$।

निष्कर्ष

n-वीं अवस्था में $\langle x \rangle = L/2$, $\langle p \rangle = 0$, $\Delta x = L\sqrt{(1/12 - 1/(2n^2\pi^2))}$ और $\Delta p = n\pi\hbar/L$। इनका गुणनफल सदैव $\hbar/2$ से अधिक रहता है, और बड़े n के लिए क्वांटम परिणाम चिरसम्मत परिणामों की ओर जाते हैं, जो बोर के संगति सिद्धांत के अनुरूप है।

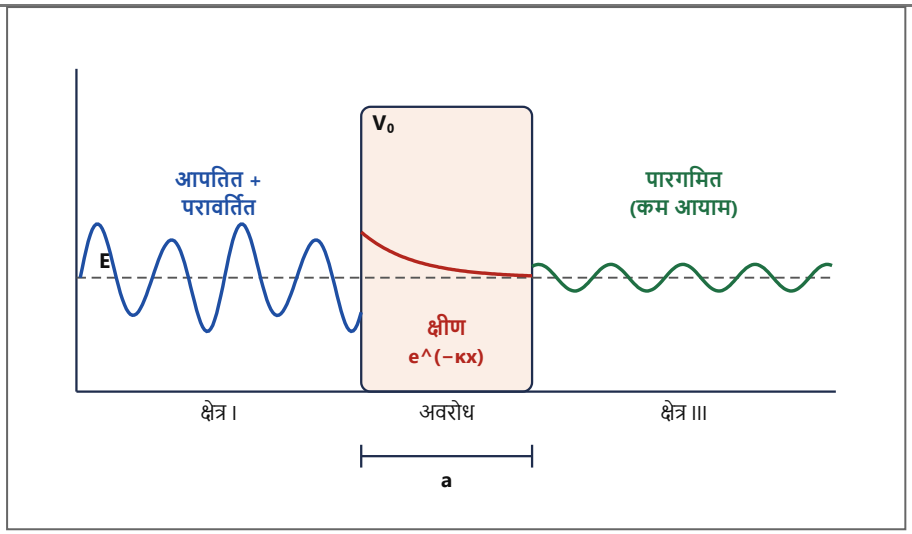
प्रश्न 6 (अथवा) · इकाई 4 10 अंक · ≈ 600–700 शब्द

आयताकार अवरोध के पारगमन गुणांक का उपयोग करके 2 eV ऊँचे और 0.5 nm तथा 1 nm चौड़े अवरोध से टकराते 1 eV इलेक्ट्रॉन की सुरंगन प्रायिकता परिकलित कीजिए। समझाइए कि सुरंगन अल्फा क्षय की व्याख्या कैसे करता है और स्कैनिंग टनलिंग सूक्ष्मदर्शी में कैसे कार्य करता है।

भूमिका

चिरसम्मत भौतिकी में ऊर्जा E वाला कण $V_0 > E$ ऊँचाई के अवरोध को पार नहीं कर सकता। क्वांटम यांत्रिकी में तरंग-फलन अवरोध पर अचानक नहीं रुकता। अवरोध के भीतर वह **चरघातांकी रूप से क्षीण** होता है, और यदि अवरोध पर्याप्त पतला हो तो तरंग का एक छोटा भाग दूसरी ओर निकल आता है। इस रिसाव को **सुरंगन** या अवरोध-भेदन कहते हैं।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।



कण-तरंग आयताकार अवरोध से टकराती है: बाईं ओर दोलनशील, भीतर क्षीण, दाईं ओर कम आयाम की

पारगमन गुणांक

V_0 ऊँचाई और a चौड़ाई के अवरोध तथा $E < V_0$ के लिए श्रोडिंगर समीकरण अवरोध के भीतर $\psi \propto e^{\pm \kappa x}$ देता है, जहाँ

$$\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)} / \hbar$$

सटीक पारगमन प्रायिकता है

$$T = [1 + V_0^2 \sinh^2(\kappa a) / (4E(V_0 - E))]^{-1}$$

मोटे अवरोध ($\kappa a \gg 1$) के लिए यह उपयोगी सन्निकटन बन जाता है

$$T \approx 16 (E/V_0)(1 - E/V_0) e^{-2\kappa a}$$

T चौड़ाई a के साथ, द्रव्यमान के वर्गमूल के साथ, और $\sqrt{(V_0 - E)}$ के साथ **चरघातांकी रूप से** घटता है।

संख्यात्मक समस्या

आँकड़ा: $E = 1$ eV, $V_0 = 2$ eV, अतः $V_0 - E = 1$ eV; इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg।

चरण 1: κ। $\kappa = \sqrt{(2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.602 \times 10^{-19})} / 1.055 \times 10^{-34} = 5.12 \times 10^{9}$ m^{-1} = **5.12 nm^{-1}**।

(उपयोगी मान: $\kappa = 5.12$ $nm^{-1} \times \sqrt{(eV \text{ में } V_0 - E)}$।)

चरण 2: पूर्वगुणक। $16 (E/V_0)(1 - E/V_0) = 16 \times 0.5 \times 0.5 = 4$।

(i) चौड़ाई a = 0.5 nm: $2\kappa a = 2 \times 5.12 \times 0.5 = 5.12$।

$T \approx 4 \times e^{-5.12} = 4 \times 5.96 \times 10^{-3} =$ **0.024**, लगभग **2.4%**।

(ii) चौड़ाई a = 1 nm: $2\kappa a = 10.25$।

$T \approx 4 \times e^{-10.25} = 4 \times 3.55 \times 10^{-5} =$ **1.4×10^{-4}**, लगभग 0.014%।

(सटीक सूत्र 0.0235 और 1.42×10^{-4} देता है, जो इन मानों से निकटता से मेल खाते हैं।)

टिप्पणी: चौड़ाई दोगुनी करने से प्रायिकता लगभग 170 गुना घट जाती है। इसलिए इलेक्ट्रॉनों के लिए सुरंगन केवल परमाणवीय दूरियों (लगभग 1 nm या कम) पर महत्वपूर्ण है, और भारी कणों के लिए यह बहुत कम होता है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

अनुप्रयोग 1: अल्फा क्षय

भारी नाभिक में अल्फा कण प्रबल नाभिकीय बल से बँधा रहता है और बाहर निकलने के प्रयास में कूलॉम अवरोध का सामना करता है। यूरेनियम-238 के लिए अवरोध अल्फा की ऊर्जा 4.27 MeV से ऊँचा है, इसलिए चिरसम्मत रूप से वह कभी बाहर नहीं निकल सकता। जॉर्ज गैमो ने 1928 में समझाया कि अल्फा अवरोध से सुरंगन करता है, और दीवार से हर टकराव में इसकी प्रायिकता बहुत छोटी होती है।

- पारगमन प्रायिकता अवरोध की चौड़ाई और ऊँचाई पर चरघातांकी रूप से निर्भर है, इसलिए **अर्ध-आयु अल्फा ऊर्जा के प्रति अत्यंत संवेदनशील** है (गाइगर-न्यूटॉल नियम)।
- **यूरेनियम-238** 4.27 MeV के अल्फा छोड़ता है और उसकी अर्ध-आयु 4.5×10^{9} वर्ष (लगभग 1.4×10^{17} s) है। **पोलोनियम-212** 8.78 MeV के अल्फा छोड़ता है और उसकी अर्ध-आयु केवल 0.3 माइक्रोसेकंड है। ऊर्जा में 2 गुना अंतर अर्ध-आयु को लगभग 10^{23} गुना बदल देता है।

अनुप्रयोग 2: स्कैनिंग टनलिंग सूक्ष्मदर्शी (STM)

एक तीक्ष्ण धात्विक नोक को चालक सतह से लगभग 0.5 nm के भीतर लाया जाता है और छोटा वोल्टता लगाई जाती है। इलेक्ट्रॉन निर्वात अंतराल के पार सुरंगन करते हैं, जिससे धारा $\mathbf{I \propto e^{-2\kappa d}}$ मिलती है, जहाँ d अंतराल है और κ कार्य-फलन φ से निर्धारित होता है।

संवेदनशीलता: $\varphi \approx 4.5$ eV के लिए $\kappa = 5.12 \times \sqrt{4.5} = 10.9\ \text{nm}^{-1}$। यदि अंतराल 0.1 nm बदले, तो धारा $e^{2 \times 10.9 \times 0.1} = e^{2.17} \approx \mathbf{9}$ गुना बदलती है, लगभग एक कोटि। केवल 0.01 nm के परिवर्तन से धारा लगभग 24% बदलती है, जिसे आसानी से मापा जा सकता है। इसीलिए STM एक परमाणु के आकार से भी महीन ऊर्ध्वाधर विभेदन के साथ सतहों का मानचित्र बना सकता है, और अलग-अलग परमाणुओं को हिला भी सकता है।

अन्य उपयोग

- **सुरंग डायोड** और जोसेफसन संधि।
- **फ्लैश मेमोरी**, जिसमें आवेश संचित करने के लिए इलेक्ट्रॉन पतली ऑक्साइड परत से सुरंगन करते हैं।
- **सूर्य में नाभिकीय संलयन**, जहाँ प्रोटॉन अपने पारस्परिक कूलॉम प्रतिकर्षण से सुरंगन करते हैं, उस ताप पर जो चिरसम्मत रूप से आवश्यक ताप से कम है।

निष्कर्ष

सुरंगन सीधे पदार्थ की तरंग प्रकृति से निकलता है। प्रायिकता अवरोध की चौड़ाई और ऊँचाई के साथ चरघातांकी रूप से घटती है, जो अल्फा क्षय की अर्ध-आयुओं के विशाल परास और STM की अत्यधिक संवेदनशीलता दोनों को समझाती है।

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Exam Strategy परीक्षा रणनीति

1. Always write the formula first, then substitute with units, then the answer. In numerical questions, marks are given for each of these three steps.
2. Learn the constants: h = 6.626 × 10^{-34} J s, ħ = 1.055 × 10^{-34} J s, m(electron) = 9.11 × 10^{-31} kg, 1 eV = 1.602 × 10^{-19} J, hc = 12400 eV Å.
3. For derivations, state the assumptions and the boundary conditions clearly. Examiners give marks for the logical steps even if the final algebra slips.
4. Draw the standard diagrams neatly and label them: blackbody curves, wave packet, potential well with wave functions, barrier with decaying wave.
5. After every derivation write one line of physical meaning, for example 'zero-point energy is a consequence of the uncertainty principle'.
6. Keep the correspondence principle in mind: for large n or small h the quantum result must reduce to the classical one. It is a good closing line for many answers.
7. Attempt all five short questions; each 4-mark answer needs a definition or formula, a short working and a conclusion in about 100-120 words.

1. हमेशा पहले सूत्र लिखें, फिर मात्रकों के साथ मान रखें, फिर उत्तर। संख्यात्मक प्रश्नों में इन तीनों चरणों पर अंक मिलते हैं।
2. नियतांक याद रखें: h = 6.626 × 10^{-34} J s, ħ = 1.055 × 10^{-34} J s, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान = 9.11 × 10^{-31} kg, 1 eV = 1.602 × 10^{-19} J, hc = 12400 eV Å।
3. व्युत्पत्तियों में मान्यताएँ और सीमा-शर्तें स्पष्ट लिखें। अंतिम बीजगणित में चूक हो तब भी परीक्षक तार्किक चरणों पर अंक देते हैं।
4. मानक चित्र साफ़ बनाएँ और नामांकित करें: कृष्णिका वक्र, तरंग-संहति, तरंग-फलनों सहित विभव-कूप, क्षीण होती तरंग सहित अवरोध।
5. हर व्युत्पत्ति के बाद भौतिक अर्थ की एक पंक्ति लिखें, जैसे 'शून्य-बिंदु ऊर्जा अनिश्चितता सिद्धांत का परिणाम है'।
6. संगति सिद्धांत ध्यान में रखें: बड़े n या छोटे h पर क्वांटम परिणाम को चिरसम्मत परिणाम में बदलना चाहिए। यह कई उत्तरों की अच्छी अंतिम पंक्ति है।
7. पाँचों लघु प्रश्न हल करें; प्रत्येक 4 अंक के उत्तर में परिभाषा या सूत्र, संक्षिप्त गणना और निष्कर्ष लगभग 100-120 शब्दों में चाहिए।

Final reminder / अंतिम सलाह: This Demo Set shows how our answers are written. For the full sets, open the Pariksha Pass App. Whatever you practise, revise the entire syllabus. यह डेमो सेट हमारे उत्तरों की शैली दिखाता है। पूरे सेट के लिए परीक्षा पास ऐप खोलें। जो भी अभ्यास करें, पूरा पाठ्यक्रम दोहराएँ।

Online Student Seva · Pariksha Pass App · Edition Oct 2026

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।

Unlock the full sets in the Pariksha Pass App पूरे सेट परीक्षा पास ऐप में अनलॉक करें

You have just seen one Demo Set. The full Guessing Papers for your university, course and subject are available inside the **Pariksha Pass App**, brought to you by **Online Student Seva**.

आपने अभी एक डेमो सेट देखा है। आपके विश्वविद्यालय, कोर्स और विषय के पूरे गेसिंग पेपर **ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा** की **परीक्षा पास ऐप** में उपलब्ध हैं।

What a full paper set contains

- Up to three sets for each subject: Set A (Most Probable), Set B (Highly Likely) and Set C (Alternate).
- In every set: 10 objective questions with explanations, 5 short-answer questions and 8 long-answer questions (4 units, each with an internal choice), all with model answers.
- Every answer in English and in full, independent Hindi, with labelled diagrams, tables and worked solutions where the subject needs them.
- A syllabus-coverage page, a list of the prescribed books and a subject-specific exam-strategy page.

पूरे सेट में क्या मिलता है

- हर विषय के अधिकतम तीन सेट: सेट A (सबसे संभावित), सेट B (अधिक संभावित) और सेट C (वैकल्पिक)।
- हर सेट में: स्पष्टीकरण सहित 10 वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 5 लघु उत्तरीय प्रश्न और 8 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (4 इकाइयाँ, प्रत्येक में आंतरिक विकल्प), सभी के आदर्श उत्तर सहित।
- हर उत्तर अंग्रेज़ी में और पूर्ण, स्वतंत्र हिन्दी में, जहाँ विषय को आवश्यकता हो वहाँ नामांकित चित्र, तालिकाएँ और हल किए गए उदाहरण सहित।
- पाठ्यक्रम-कवरेज पृष्ठ, अनुशंसित पुस्तकों की सूची और विषय-विशेष परीक्षा-रणनीति पृष्ठ।

Please note / कृपया ध्यान दें: Questions in the full sets are chosen from the syllabus on the basis of high-probability topic coverage. No set can promise which questions will appear in the examination, so always prepare the complete syllabus from your text book.

पूरे सेटों के प्रश्न पाठ्यक्रम से अधिक संभावित टॉपिक कवरेज के आधार पर चुने जाते हैं। कोई भी सेट यह वादा नहीं कर सकता कि परीक्षा में कौन-से प्रश्न आएँगे, इसलिए अपनी पाठ्यपुस्तक से पूरा पाठ्यक्रम अवश्य तैयार करें।

Online Student Seva · Pariksha Pass App
ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · परीक्षा पास ऐप

Download Pariksha Pass App >

Get all 3 full Guessing Paper sets on Google Play

© Online Student Seva · Exclusive property · Accessible only through the Pariksha Pass App · Copying, sharing or selling is strictly prohibited and will invite serious legal action.
© ऑनलाइन स्टूडेंट सेवा · विशेष संपत्ति · केवल परीक्षा पास ऐप पर उपलब्ध · कॉपी, शेयर या बिक्री पर कड़ी कानूनी कार्रवाई होगी।